

Signoriniho problém s koeficientem tření závislejícím na řešení (model s daným třením)

Jaroslav Haslinger¹ a Oldřich Vlach²

¹ Katedra fyziky kovů, Fakulta Matematiky a Fyziky, Karlova Univerzita,
Ke Karlovu 5, 121 16, Praha 2

haslin@met.mff.cuni.cz

² Katedra aplikované matematiky, FEI, VŠB-TU Ostrava,
17. listopadu 15, 708 33, Ostrava-Poruba

oldrich.vlach2@vsb.cz

Abstrakt. Zkoumány jsou kontaktní problémy s (daným) třením, kde koeficient tření závisí na řešení. V realizaci je užitá metoda prostých iterací, s duální formulací v každém kroku.

Klíčová slova: kontaktní problém, dané tření, koeficient tření závisějící na řešení

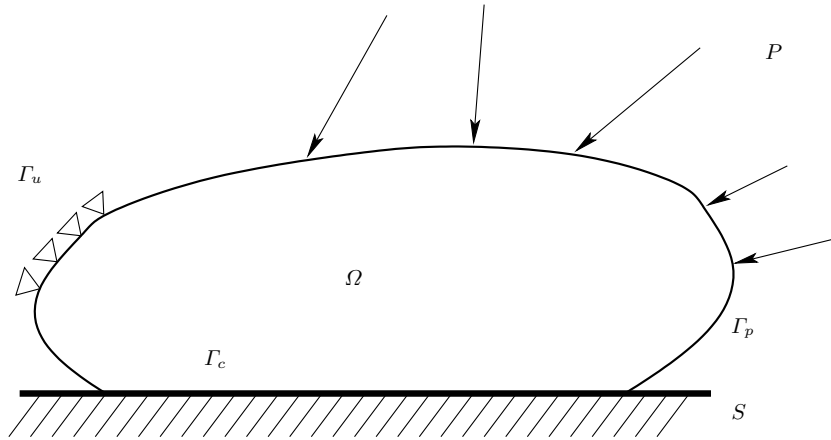
1 Úvod

V posledních letech nabývá na významu řešení kontaktních problémů se třením. Omezíme se na 2D úlohy nezávislé na čase (stacionární). Hledáme výslednou deformaci soustavy těles, na níž působí vnější síly. Na kontaktu těles dochází ke tření. Tření je nejčastěji popisováno Coulombovým zákonem: „Tření v místě kontaktu je *menší nebo rovno* normálové síle násobené koeficientem \mathcal{F} “. Koeficient tření popisuje materiálové vlastnosti obou těles v kontaktu, a závisí často pouze na souřadnicích kontaktního bodu. V našem případě však \mathcal{F} závisí na výsledné deformaci, přesněji na absolutní hodnotě tečné složky deformace. Pokud se po sobě tělesa „sklouznou“, bude koeficient tření menší.

Pokud nám někdo dopředu napoví kontaktní normálovou sílu deformace, jedná se o úlohu s daným třením, na kterou se zde omezíme. Tuto úlohu umíme snadno vyřešit, pokud \mathcal{F} nezávisí na řešení. Případ, kdy \mathcal{F} na řešení závisí pak hledáme pomocí iterací (jakýmsi zpřesňováním) úloh s nezávislým koeficientem tření. Omezíme se na kontakt jednoho tělesa s tuhým podkladem. Umožní nám to přehlednější formulaci úlohy. Následující postup pak lze rozšířit i na kontakt více těles.

2 Formulace problému

Mějme problém lineární elasticity, kdy na omezenou oblast Ω tělesa působí vnitřní síly $F \in (L^2(\Omega))^2$, a povrchové síly $P \in (L^2(\Gamma_p))^2$ na části Γ_p hranice



$\partial\Omega$. Těleso je upevněno na hranici Γ_u . Na hranici Γ_c může dojít ke kontaktu s tuhým podložím S . Pro jednoduchost nechť S tvoří přímka osy x_1 .

Na hranici Γ_c jsou předepsány podmínky pro *nepronikání* (1) a pro *tření* (2)

$$u_2 \geq 0 \quad , \quad T_2(u) \geq 0 \quad , \quad u_2 T_2(u) = 0 \quad \text{na } \Gamma_c \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} |T_1(u)| \leq \mathcal{F}(|u_1|)g \quad \text{na } \Gamma_c \\ |T_1(u)(x)| < \mathcal{F}(|u_1(x)|)g(x) \Rightarrow u_1(x) = 0 \quad x \in \Gamma_c \\ |T_1(u)(x)| = \mathcal{F}(|u_1(x)|)g(x) > 0 \Rightarrow \exists \lambda(x) \geq 0 : \\ u_1(x) = -\lambda(x)T_1(u(x)) \quad x \in \Gamma_c , \end{array} \right\} \quad (2)$$

kde $g(x)$ je dané omezení na tření, $(T_1(u), T_2(u))$ je vektor napětí závislý na řešení. Definujme pomocnou úlohu s daným třením, kde koeficient tření je závislý na odhadu $\varphi \approx |u_1|$ absolutní hodnoty tečné složky deformace, tj. $\mathcal{P}(\varphi)$:

$$\min_{v \in K} J(v) = \min_{v \in K} \frac{1}{2} a(v, v) - L(v) + j(\varphi) \quad , \quad (\mathcal{P}(\varphi))$$

kde

$$\begin{aligned} V &= \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ na } \Gamma_u\}, \quad \mathbb{V} = V \times V \\ K &= \{v = (v_1, v_2) \in \mathbb{V} \mid v_2 \geq 0 \text{ s.v. na } \Gamma_c\} \\ a(u, v) &= \int_{\Omega} \varepsilon(u) : C : \varepsilon(v) dx \quad j(v) = \int_{\Gamma_p} \mathcal{F}(|\varphi|)g dx_1 \\ L(v) &= \int_{\Omega} Fv dx + \int_{\Gamma_p} Pv dx_1 \end{aligned}$$

Je známo, že $(\mathcal{P}(\varphi))$ má právě jedno řešení pro každé φ . Definujme tedy zobrazení

$$\Psi : \varphi \mapsto \text{trace}_{\Gamma_c} |u_1(\varphi)| \quad , \quad (3)$$

a řešení naší úlohy pak definujeme jako u řešící $(\mathcal{P}(\varphi))$, kde φ je pevný bod Ψ .

3 Numerická realizace

V článku, který nám vyjde v časopise Applications of Mathematics bude důkaz, že pokud funkce \mathcal{F} „neklesá příliš rychle“, tak má úloha právě jedno řešení.

Až do této chvíle byla úloha definována v deformačních posunutích, (tj. v proměnných definovaných všude v Ω). Dá se ale přeformulovat pomocí Lagrangeových multiplikátorů do napětí, tj. duálních proměnných definovaných pouze na kontaktní hranici.

$$\left. \begin{aligned} \text{Najdi } \lambda := \lambda(\varphi) \text{ tak, aby} \\ \mathcal{S}(\lambda) \leq \mathcal{S}(\mu) = \frac{1}{2}b(\mu, \mu) - f(\mu) \quad \forall \mu \in \Lambda(\varphi), \end{aligned} \right\} (\mathcal{D}(\varphi))'$$

$$\begin{aligned} \Lambda_1(\varphi) &= \{\mu_1 \in L^2(\Gamma_c) \mid |\mu_1| \leq \mathcal{F}(\varphi) \text{ s.v. na } \Gamma_c\} \\ \Lambda_2 &= H_+^{-1/2}(\Gamma_c) \quad \Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2) \end{aligned}$$

Tímto se v diskretizaci a numerickém řešení pomocí konečných prvků radikálně zmenší rozměr úlohy. Po diskretizaci pro tuto minimalizaci kvadratické funkce s omezením ve tvaru nerovností používáme algoritmus založený na metodě sdružených gradientů popsany v [1]. Dále pak je dokázáno, že k výpočtu tečné složky posunutí potřebné pro φ v příštím kroku iterace nemusíme přepočítávat posunutí z duálních proměnných. Reziduum duálního problému přímo odpovídá posunutí na hranici. První složka rezidua je rovna tečnému posunutí na kontaktní hranici.

Uvedeme zde dva algoritmy pro řešení Signoriniho úlohy s koeficientem tření závislým na řešení. Oba jsou založeny na metodě prostých iterací, kombinované s duální formulací. Pro první z nich máme důkaz o konvergenci k řešení.

VARIANTA I.

$\varphi^{(0)}$ dáno;

pro známé $\varphi^{(k)}$ vypočti $\lambda^{(k)}, \varphi^{(k+1)}$ takto:

(i) $\lambda^{(k)} \in \Lambda(\varphi^{(k)}) : \mathcal{S}(\lambda^{(k)}) \leq \mathcal{S}(\mu) \quad \forall \mu \in \Lambda(\varphi^{(k)})$,
t.j. $\lambda^{(k)}$ řeší $(\mathcal{D}(\varphi^{(k)}))'$;

(ii) $\varphi^{(k+1)} := |(\text{res } \lambda^{(k)})_1|$ je absolutní hodnota
 x -ové složky rezidua.

Opakuj dokud není splněno kritérium pro zastavení.

Při bližším nahlédnutí na problém $(\mathcal{D}(\varphi))$ se dá vysledovat, že problém lze rozdělit na dva poloviční. V nich fixujeme tečné, respektive normálové napětí. Toho jsme využili ve variantě 2, kde odděleně od sebe řešíme úlohu $(\mathcal{D}(\varphi))$ s pevně danou tečnou, resp. normálovou složkou napětí. Varianta 2 je pak podobná algoritmu pro řešení úloh s Coulombovým třením (viz [2]).

VARIANTA II.

$\varphi^{(0)}, \lambda_1^{(0)}$ dáno;

pro známé $\varphi^{(k)}, \lambda_1^{(k)}$ vypočti $\lambda_2^{(k)}, \lambda_1^{(k+1)}, \varphi^{(k+1)}$:

(i) $\lambda_2^{(k)} \in \Lambda_2 : \mathcal{S}(\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}) \leq \mathcal{S}(\lambda_1^{(k)}, \mu_2) \quad \forall \mu_2 \in \Lambda_2$,

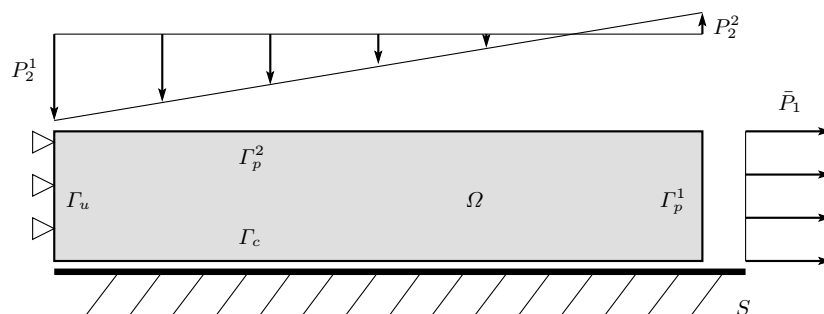
(ii) $\lambda_1^{(k+1)} \in \Lambda_1(\varphi^{(k)}) : \mathcal{S}(\lambda_1^{(k+1)}, \lambda_2^{(k)}) \leq \mathcal{S}(\mu_1, \lambda_2^{(k)}) \quad \forall \mu_1 \in \Lambda_1(\varphi^{(k)})$,

(iii) $\varphi^{(k+1)} := |\text{res } \lambda_1^{(k+1)}|$, absolutní hodnota je residua podproblému.

Opakuj dokud není splněno kritérium pro zastavení.

4 Příklady

Algoritmus obou variant je naprogramován v programu Matlab, zde ho vyzkoušíme na jednom příkladu. Zatížení a geometrie je načrtnuto na obrázku.



$$\mathcal{F}(t) = \begin{cases} 0.3 - 0.05t^2 \text{param}^2 & \text{pro } t \leq \frac{1}{\text{param}^2} \\ \frac{0.05}{2\text{param}(t - \frac{1}{\text{param}}) + 1} + 0.2 & \text{pro } t > \frac{1}{\text{param}^2} \end{cases}$$

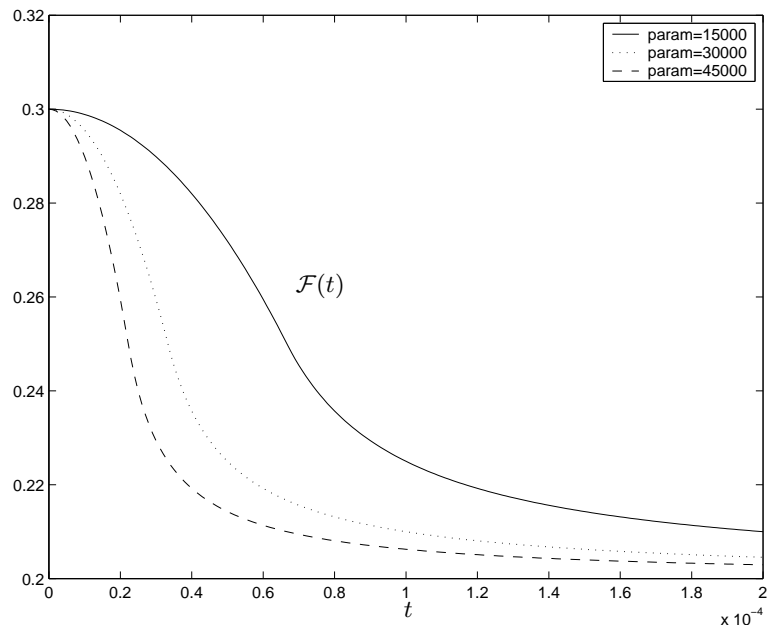
Sledovali jsme chování algoritmu pro různé funkce $\mathcal{F}(t)$ koeficientu tření, a to konkrétně pro $\text{param} = 15000, 30000, 45000$. Průběh funkcí je znázorněn na obrázku 1

Obě varianty používaly stejného kritéria pro zastavení:

$$\frac{\|\varphi^{k+1} - \varphi^k\|}{\|\varphi^k\|} \leq 10^{-6}$$

Počty iterací při hledání pevného bodu, a počty iterací sružených gradientů jsou uvedeny v tabulce.

Průběh konvergence obou metod je znázorněn na obrázku 2.



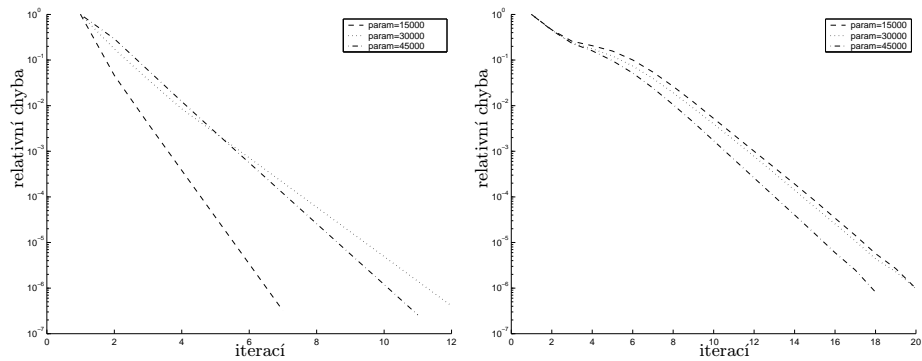
Obr. 1. Průběh funkce \mathcal{F} pro různé parametry.

param	iterace			
	VARIANTA I		VARIANTA II	
	pevný bod	SG	pevný bod	SG
15000	7	722	20	737
30000	12	1011	20	693
45000	11	835	18	619

5 Shrnutí

Metoda hledání pevného bodu umožňuje úspěšně řešit popsaný typ úloh. Varianta II. je co se týče rychlosti lepší. Počítá (dvakrát) minimalizaci poloviční úlohy, i počet iterací sdružených gradientů bývá menší. U varianty I. však máme dokázanu konvergenci. Varianta II. je velmi podobná řešení úlohy s Coulombovským třením kde koeficient tření nezávisí na řešení. Na konci každé iterace lze provést tedy také opravu normálového napětí, a máme algoritmus pro řešení úlohy s Coulombovským třením, kde koeficient tření na řešení závisí. Zde máme numerické experimenty (prezentovány na posteru na konferenci IMAM'03), ale už ne důkaz konvergence.

Poněkud složitější jsou 3D úlohy, kdy tečné napětí tvoří vektor, a je popsáno dvěma multiplikátory. Tudy se bude ubírat naše práce dále.



Obr. 2. Průběhy konvergence: varianta I vlevo, varianta II vpravo.

Reference

1. Dostál Z.: Box Constrained Quadratic Programming with Proportioning and Projections. *SIAM Journal on Optimizatopn*, 1997, 7(3).
2. Haslinger J., Dostál Z., Kučera R.: On a splitting type algorithm for the numerical realization of contact problems with Coulomb friction. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 2002

Annotation. Contact problems with given friction and the coefficient of friction depending on their solutions are studied. We prove the existence of at least one solution eventually its uniqueness under additional assumptions on the coefficient of friction. The method of successive approximations combined with the dual formulation of each iterative step is used for the numerical realization. Numerical results of model examples are shown.