

Cvičení 8

Výchozími (nedokazovanými, primárními) dedukčními pravidly jsou všechna dedukční pravidla uvedená v definici 2.3.1 pro práci s výrokovými funktory, tj.:

Zavedení konjunkce:	$A, B \vdash A \wedge B$	ZK
Eliminace konjunkce:	$A \wedge B \vdash A, B$	EK
Zavedení disjunkce:	$A \vdash A \vee B$ nebo $B \vdash A \vee B$	ZD
Eliminace disjunkce:	$A \vee B, \neg A \vdash B$ nebo $A \vee B, \neg B \vdash A$	ED
Zavedení implikace:	$B \vdash A \supset B$	ZI
Eliminace implikace:	$A \supset B, A \vdash B$ <i>modus ponens</i>	MP
Zavedení ekvivalence:	$A \supset B, B \supset A \vdash A \equiv B$	ZE
Eliminace ekvivalence:	$A \equiv B \vdash A \supset B, B \supset A$	EE

a následující čtyři pravidla pro práci s kvantifikátory:

Zavedení obecného kvantifikátoru: $A(x) \vdash \forall x A(x)$ **Z \forall**
 Pravidlo lze použít pouze tehdy, jestliže formule $A(x)$ není odvozena z žádného předpokladu, který obsahuje x jako volnou proměnnou. (@ rozvest)

Eliminace obecného kvantifikátoru: $\forall x A(x) \vdash A(x/t)$ **E \forall**
 Formule $A(x/t)$ je výsledkem korektní substituce termu t za proměnnou x ve formuli $A(x)$, tedy term t musí být substituovatelný za x ve formuli A .

Zavedení existenčního kvantifikátoru: $A(x/t) \vdash \exists x A(x)$ **Z \exists**

Eliminace existenčního kvantifikátoru: $\exists x A(x) \vdash A(x/c)$ **E \exists**
 Použijeme-li pravidlo $E\exists$ pro různé formule A , musíme za proměnnou x substituovat vždy jinou konstantu.
 Obsahuje-li formule A , kromě kvantifikované proměnné x , ještě další volné proměnné, lze pravidlo eliminace existenčního kvantifikátoru formulovat obecněji takto:

$$\exists x A(x, y_1, \dots, y_n) \vdash A(x / f(y_1, \dots, y_n), y_1, \dots, y_n) \quad E\exists$$

V tomto případě nelze za kvantifikovanou proměnnou x substituovat konstantu, ale funkci zbývajících (volných) proměnných. Použijeme-li pravidlo vícekrát pro různé formule, musíme za proměnnou x substituovat vždy jinou funkci $f(y_1, \dots, y_n)$.

Příklady:

1. Pomocí metody přirozené dedukce dokažte platnost následujícího úsudku (pokuste se použít pouze základní dedukční pravidla):

P1: Žádné sudé číslo není liché.
P2: Některá sudá čísla jsou prvočísla.

Z: Některé prvočísla nejsou lichá.

2. Pomocí metody přirozené dedukce dokažte platnost následujícího úsudku (dokažte všechny pomocné teorémy):

P1. $\forall x \forall y [(P(x,a) \wedge P(x,b)) \supset Q(x,y)]$
P2. $\exists x [\neg Q(x,b) \wedge P(x,b)]$

Z: $\exists x [P(x,b) \wedge \neg P(x,a)]$

3. Pomocí metody přirozené dedukce rozhodněte, zda jsou následující úsudky platné (úsudek formalizujte a dokažte všechny pomocné teorémy).

a) P1: Každý někomu pije krev.
P2: Komu pije krev Drákula, ten brzo zemře.
Závěr: Někdo brzo zemře.

b) P1: Každý, kdo miluje jachting a moře, cítí k moři respekt.
P2: Někteří respekt k moři necítí, ačkoliv ho milují.
Závěr: Zřejmě existují takoví, kteří milují moře, ale nikoliv jachting.

c) P1: Každý horolezec má rád pěkné počasí a pivo.
P2: Michal má rád pouze milovníky pěkného počasí a piva.
P3: Někteří milovníci pěkného počasí nemají rádi pivo.
P4: Kdo není horolezec, ten se bojí výšek.
Závěr: Michal nemá rád některé lidi, kteří se bojí výšek.

4. Pomocí metody přirozené dedukce rozhodněte logickou pravdivost následujících formulí (dokažte všechny pomocné teorémy)

a) $\exists y \forall x [M(y) \wedge S(x,y)] \supset \{ \forall x \forall y [(B(x,y) \wedge M(y)) \supset \neg V(y)] \supset$
 $\{ \forall x \forall y [\neg M(y) \vee B(x,y)] \supset \forall x \neg V(x) \}$

b) $\{ \forall x \forall y [R(x,y) \wedge R(y,x)] \wedge \forall x \forall y \forall z [R(x,y) \wedge R(y,z) \supset R(x,z)] \} \supset \forall x R(x,x)$