

Cvičení 6

1. Promyslete příklady na relace s různou aritou nad určitým universem. Uveďte příklady homogenních unárních, binárních a ternárních relací, heterogenních binárních, ternárních a 5-árních (rozvrh) relací.

2. Rozhodněte, zda jsou následující relace funkcemi, případně jakými. Budeme pracovat s množinami $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $B=\{b_1, b_2, b_3\}$ a $C=\{c_1, c_2, c_3\}$ jejichž prvky jsou různé.

- a) $R \subseteq A \times B$, $R = \{\langle a_1, b_3 \rangle, \langle a_2, b_2 \rangle, \langle a_1, b_1 \rangle\}$
- b) $R \subseteq B \times A$, $R = \{\langle b_1, a_4 \rangle, \langle b_2, a_4 \rangle, \langle b_3, a_4 \rangle\}$
- c) $R \subseteq A \times C$, $R = \{\langle a_1, c_2 \rangle, \langle a_2, c_3 \rangle, \langle a_3, c_1 \rangle\}$
- d) $R \subseteq C \times A$, $R = \{\langle c_2, a_1 \rangle, \langle c_3, a_2 \rangle, \langle c_1, a_3 \rangle\}$
- e) $R \subseteq B \times C$, $R = \{\langle b_1, c_3 \rangle, \langle b_2, c_2 \rangle, \langle b_3, c_1 \rangle\}$
- f) $R \subseteq A \times B \times C$, $R = \{\langle a_1, b_1, c_1 \rangle, \langle a_2, b_2, c_1 \rangle, \langle a_1, b_2, c_3 \rangle\}$
- g) $R = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, y = x^2\}$
- h) $R = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, x = y^2\}$
- i) $R = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, y = x^2\}$
- j) $R = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, x = y^2\}$

3. Vyjádřete slovně následující skutečnosti za předpokladu, že predikát **P** znamená mít rád (kdo, koho), individuová konstanta **m** znamená Marie a individuová konstanta **k** Karel.

- a) $\exists x \exists y P(x, y)$
- b) $\exists x \forall y P(x, y)$
- c) $\exists y \forall x P(x, y)$
- d) $\forall x \exists y P(x, y)$
- e) $\forall x \forall y P(x, y)$
- f) $\forall x P(x, m)$
- g) $\forall y P(k, y)$

4. Rozhodněte, zda vyjádříme následující skutečnosti pomocí predikátového nebo funkčního symbolu.

- a) Otec
- b) Být rodičem
- d) Součet dvou čísel
- e) Být spokojen s čím
- f) Sudá čísla
- g) Dělitelnost dvěma
- h) Modulo 2 (zbytek po dělení 2)
- i) Násobek dvou čísel je dělitelný dvěma
- j) Být větší
- k) Následník tj. přičtení 1

5. Dokažte, že následující formule **nejsou ekvivalentní** (tj. najděte interpretaci, ve které je pravdivá jedna z nich, ale ne druhá). Jaký je mezi těmito formulemi vztah?

$$\exists x \forall y P(x,y) \quad \forall y \exists x P(x,y)$$

6. Zapište v jazyce PL1 následující výroky a najděte jejich **modely** a také **interpretace, ve kterých nejsou pravdivé**:

- a) Množiny A a B mají neprázdný průnik. Některá A jsou B.
- b) Všechna čísla jsou sudá nebo lichá.
- c) Množina A je podmnožinou množiny B. Všechna A jsou B.
- d) Žádné A není B. Množina A je podmnožinou komplementu množiny B.
- e) Některá A nejsou B.

7. Najděte model pro následující formule

- a) $\exists x R(x, f(x))$
- b) $\forall x R(x, f(x))$
- c) $\forall x \forall y [P(x,y) \supset Q(f(x),y)]$
- d) $\forall x \forall y [P(x,y) \supset \neg Q(f(x),y)]$
- e) $\exists x \forall y [V(x,y)]$
- f) $\forall y \exists x [\neg V(x,y)]$