Okruh č.1 Definice logického vyplývání, vlastnosti deduktivních úsudků

Úsudek $P_1, \dots, P_n$ / Z je deduktivně ***správný (platný),*** značíme $\mathbf{P_1, \dots, P_n \models Z}$,
jestliže závěr Z ***logicky vyplývá*** z předpokladů $P_1, \dots, P_n$, tj. za všech okolností takových, že jsou pravdivé všechny předpoklady $P_1, \dots, P_n$, je (za těchto okolností) pravdivý i závěr Z.
Okolnostmi se ve VL rozumí valuace výrokových proměnných, v PL1 jsou to interpretace predikátových a funkčních symbolů relacemi a funkcemi nad universem.

Tedy jinými slovy: Za žádných *okolností*, nikdy se nemůže stát, aby byly všechny předpoklady $P_1, \dots, P_n$ pravdivé a zároveň závěr Z byl nepravdivý. Závěr Z je pravdivý za všech okolností takových, za kterých jsou pravdivé všechny předpoklady.

Správnost úsudku ověřujeme *bez empirického zkoumání* "stavu světa", tedy pouze tzv. *analytickými* metodami, neboť správnost úsudku je dána pouze *logickou strukturou* premis a závěru.

Model množiny formulí, vyplývání v PL1:

- ***Model množiny formulí*** {A1,…,A*n*} je taková interpretace I, ve které jsou pravdivé ***všechny*** formule A1,...,A*n*.
- ***Formule B logicky vyplývá z A1, …, An,*** značíme **A1,…,An** |= **B,** jestliže B je pravdivá v ***každém modelu*** množiny formulí A1,…,A*n*.
- Tedy pro každou interpretaci I, ve které jsou pravdivé formule A1, …, A*n* ($\models_I$ A1,…, $\models_I$ A*n*) platí, že je v ní pravdivá i formule B ($\models_I$ B).
- „Okolnosti“ z úvodní definice vyplývání (viz přednáška 1) tedy chápeme v PL1 jako interpretace (predikátových a funkčních symbolů relacemi a funkcemi nad universem).

Interpretace jazyka predikátové logiky 1. řádu je tato trojice objektů (která je někdy nazývána ***interpretační struktura***):

A) *Neprázdná* množina M, která se nazývá **universum diskursu** a její prvky jsou **individua.**

B) Interpretace funkčních symbolů jazyka, která přiřazuje každému *n*-árnímu funkčnímu symbolu f určité **zobrazení** $\boldsymbol{f_M: M^n \to M}$.

C) Interpretace predikátových symbolů jazyka, která přiřazuje každému *n*-árnímu predikátovému symbolu *P* jistou *n*-ární relaci $\boldsymbol{P_M} \subseteq M^n$, tj. **podmnožinu Kartézského součinu $\mathbf{M^n}$.**

Sémantická věta o dedukci

Úsudek **P1,...,P*n* |= Z** je platný, právě když je *analyticky nutně pravdivý* také výrok tvaru (P1 ∧...∧ P*n*) ⊃ Z, tj. **|= (P1 ∧...∧ P*n*) ⊃ Z**.

*Nutně, j*estliže jsou pravdivé všechny premisy P1,...,P*n*, pak je pravdivý i závěr Z.

Tedy platí: P1,...,P*n* |= Z ⇔ (právě když)

P1,...,P*n-1* |= P*n* ⊃ Z ⇔

P1,...,P*n-2* |= (P*n-1* ∧ P*n*) ⊃ Z ⇔

|= (P1 ∧...∧ P*n*) ⊃ Z

Zákon o spojování předpokladů:
P1,...,P*n* |= *Z* právě tehdy, když |= (P1 ∧ … ∧ P*n*) ⊃ Z

Logika tedy rovněž zkoumá *skladbu – konstrukci* jednotlivých složených výrazů (soudů) z jejich podvýrazů. Jednou z disciplín logiky je proto rovněž tzv. **logická analýza jazyka,** která spočívá v nalezení příslušné logické *konstrukce* vyjádřené daným výrazem. Ovšem ne všechny deduktivně správné úsudky můžeme ověřit pomocí daného logického systému. Proto hovoříme o *expresivní síle* logického systému, která je dána tím, do jaké míry podrobnosti můžeme analyzovat jednotlivé výrazy. Ideální logický systém by nám měl umožnit analyzovat premisy do takové hloubky, abychom mohli odvodit všechny závěry, které z těchto premis logicky vyplývají (provést všechny adekvátní *inference*) a ověřit všechny správné úsudky. Při nedostatečně jemné a přesné (případně nesprávné) analýze premis pak můžeme dojít k různým paradoxním závěrům

Uvedeme nyní příklady logických systémů podle jejich expresivní síly.

Výroková logika (VL) umožňuje analyzovat pouze do úrovně elementárních výroků, jejichž strukturu již dále nezkoumá.

Predikátová logika 1. řádu (PL^1) umožňuje navíc analyzovat elementární výroky do úrovně vlastností jednotlivých objektů zájmu (tzv. individuí – prvků univerza diskursu) a jejich vztahů.

Predikátové logiky vyšších řádů (PL^n) umožňují navíc analyzovat vlastnosti vlastností, vlastnosti funkcí, atd.
Jedním z nejexpresivnějších logických systémů je tzv. **Transparentní intensionální logika (TIL)**, která pracuje s objekty libovolného řádu.

Vlastnosti deduktivních úsudků

1) **Platný úsudek může mít nepravdivý závěr**.

Ověříme-li (dokážeme-li) správnost (platnost) úsudku, *nedokážeme tím* ***pravdivost*** *(máme na mysli empirickou pravdivost) závěru*! Je to proto, že správnost úsudku ověřujeme *bez empirického zkoumání* ”stavu světa”, tedy pouze tzv. *analytickými* metodami, neboť správnost úsudku je dána pouze *logickou strukturou*. Závěr je pravdivý pouze *za předpokladu* pravdivosti premis.

1) **Platný** úsudek tedy může mít **nepravdivý** závěr. (V tom případě je ovšem alespoň jedna z premis nepravdivá.)

Př.: Všechny muchomůrky zelené jsou prudce jedovaté.
Tato tužka je muchomůrka zelená.

Tato tužka je prudce jedovatá.

- Tedy, dokážeme-li, že závěr logicky vyplývá z předpokladů, ***nedokážeme tím, že závěr je pravdivý***
- Je pravdivý ***za předpokladu pravdivosti premis***

Úsudek, jehož premisy jsou pravdivé se anglicky nazývá ***sound.*** (spolehlivý, přesvědčivý).

- pravdivost či nepravdivost premis může být náhodná záležitost, kdežto vztah vyplývání mezi premisami a závěrem je ***nutný vztah („za všech okolností ...“).*** Stejně jako je tautologie logicky, tedy nutně pravdivá formule. Má-li tvar implikace, zůstává (dle definice implikace) pravdivá, i když antecedent implikace je nepravdivý.

2) **Monotónnost.** Jestliže $P_1, \dots, P_n \models Z$, pak $P_1, \dots, P_n, P_{n+1} \models Z$, pro libovolnou další premisu P_{n+1}.

3) **Tranzitivita.**
Jestliže $P_1, \dots, P_n \models Z$ a $Q_1, \dots, Q_m, Z \models Z'$, pak $P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_m \models Z'$.

4) **Reflexivita.** Je-li B rovna jedné z premis $P_1, \dots, P_n$, pak $P_1, \dots, P_n \models B$.

Definice (analytická pravdivost, kontradikce)
Výrok V je ***analyticky pravdivý***, značíme $\models V$, je-li pravdivý za všech okolností, vždy. (Množina předpokladů je prázdná, V nemůže být nepravdivý.)
Množina $\{P_1, \dots, P_n\}$ výroků je ***sporná (kontradiktorická, nesplnitelná),*** jestliže nemůže nikdy za žádných okolností nastat případ, že by byly všechny $P_1, \dots, P_n$ pravdivé, značíme $P_1, \dots, P_n \models$. (Tedy z této množiny logicky vyplývá jakýkoli výrok, i nepravdivý, proto musí být vždy alespoň jeden P_i nepravdivý.)

Nyní můžeme formulovat ještě jednu důležitou vlastnost deduktivních úsudků:

5) **Ze sporné** množiny předpokladů vyplývá **jakýkoli závěr.**

Všechny pravdivé matematické výroky jsou analyticky pravdivé. ”Běžné” výroky přirozeného jazyka nejsou analyticky pravdivé (jsou empirické, o ”stavu světa”, mohou být někdy pravdivé, jindy ne).

Důkaz tvrzení A z předpokladů $P_1,\dots,P_n$ je posloupnost tvrzení $B_1,\dots,B_m$ taková, že:

- $B_m = A$
- pro každé $i \leq m$ platí, že B_i je buď
  - jeden z předpokladů P_j nebo
  - B_i vznikne z předchozích $B_1,\dots,B_{i-1}$ uplatněním nějakého **odvozovacího pravidla.**
  -

Přitom je samozřejmě žádoucí, aby odvozovací pravidla byla volena tak, aby zachovávala pravdivost, tedy aby to, co dokážeme, logicky **vyplývalo** z daných předpokladů. Chceme-li charakterizovat určitou vědeckou disciplinu (například v matematice teorii přirozených čísel nebo teorii množin či grup apod.), můžeme se pokusit zvolit jistou množinu předpokladů, kterým říkáme **axiómy** a o kterých předpokládáme, že jsou *pro tuto oblast pravdivé* (tedy pravdivé v jisté zamýšlené interpretaci), a za použití vhodných odvozovacích pravidel dokázat mnohá (nebo dokonce v ideálním případě všechna) tvrzení, pravdivá v naší disciplině. (Pokud jsou axiómy analyticky pravdivé, pak tvrzení, která dokážeme, jsou rovněž analyticky pravdivá, tedy vždy, nejen ve zvolené disciplíně. V tom případě se jedná o „prázdnou teorii, tj. *důkazový kalkul.*) Takováto množina axiómů a odvozovacích pravidel (formulovaná v jistém formálním jazyce) se pak nazývá **logická teorie.**