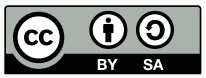
Strategie řešení rozděl a panuj

doc. Mgr. Jiří Dvorský, Ph.D.

Stav prezentace ke dni 28. dubna 2024

Katedra informatiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky
VŠB – TU Ostrava



Osnova přednášky

Strategie řešení rozděl a panuj

- Násobení velkých celých čísel
- Strassenovo násobení matic
- Problém nejbližší dvojice bodů
- Konvexní obal množiny

Strategie řešení rozděl a panuj

Master theorem

Strategie řešení rozděl a panuj

Násobení velkých celých čísel

Násobení velkých celých čísel

- Násobení „běžných“ celých čísel řeší procesor.
- Co násobení mnohem větších čísel, se stovkami číslic? Například v kryptografii.
- Určitě by šlo implementovat algoritmus podobný písemnému násobení.
- Jeho provedení vyžaduje n^2 násobení číslic, kde n je počet číslic.

$$\begin{array}{cccc} & & 2 & 3 \\ & & 1 & 4 \\ \hline & & 9 & 2 \\ & 2 & 3 & 0 \\ \hline & 3 & 2 & 2 \end{array}$$

Otázka k řešení

Lze to provést rychleji? Nebo je toto nejlepší možný algoritmus?

Násobení velkých celých čísel – násobení 23 a 14

Určíme dekadický rozvoj čísel

$$\begin{aligned} 23 &= 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 \\ 14 &= 1 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 \end{aligned}$$

A oba rozvoje mezi sebou vynásobíme

$$\begin{aligned} 23 \times 14 &= \left(2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0\right) \times \left(1 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0\right) \\ &= (2 \times 1) \cdot 10^2 + (2 \times 4 + 3 \times 1) \cdot 10^1 + (3 \times 4) \cdot 10^0 \\ &= 322 \end{aligned}$$

Pro výpočet jsme potřebovali 4 násobení (označena $\times$), tj. n^2 násobení.

Násobení velkých celých čísel – násobení 23 a 14 (pokrač.)

Prostřední výraz (desítky) lze vyhodnotit i takto

$$2 \times 4 + 3 \times 1 = (2 + 3) \times (1 + 4) - 2 \times 1 - 3 \times 4$$

Neviděli jsme výrazy 2×1 a 3×4 už někde...?

Obecněji mějme $a = a_1 a_0$ a $b = b_1 b_0$ potom

$$c = a \times b = c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10^1 + c_0,$$

kde

- $c_2 = a_1 \times b_1$ je násobek prvních číslic,
- $c_0 = a_0 \times b_0$ je násobek druhých číslic a
- $c_1 = (a_1 + a_0) \times (b_1 + b_0) - (c_2 + c_0)$ je násobek součtů číslic a a b minus číslice c_2 a c_0.

Násobení velkých celých čísel – rozděl a panuj

Mějme dvě n-ciferná čísla a a b, kde n je sudé přirozené číslo.

Označíme první polovinu číslic čísla a jako a_1, druhou polovinu jako a_0. Zápis $a = a_1 a_0$ budeme chápat jako

$$a = a_1 a_0 = a_1 \cdot 10^{n/2} + a_0$$

Pro $b = b_1 b_0$ platí obdobný vztah.

Násobení velkých celých čísel – rozděl a panuj

Součin $c = a \times b$ můžeme zapsat jako

$$\begin{aligned} c &= \left(a_1 \cdot 10^{n/2} + a_0\right) \times \left(b_1 \cdot 10^{n/2} + b_0\right) \\ &= (a_1 \times b_1) \cdot 10^n + (a_1 \times b_0 + a_0 \times b_1) \cdot 10^{n/2} + (a_0 \times b_0) \\ &= c_2 \cdot 10^n + c_1 \cdot 10^{n/2} + c_0, \end{aligned}$$

kde

- $c_2 = a_1 \times b_1$ je násobek prvních polovin,
- $c_0 = a_0 \times b_0$ je násobek druhých polovin a
- $c_1 = (a_1 + a_0) \times (b_1 + b_0) - (c_2 + c_0)$ je násobek součtů polovin čísel a a b minus součet c_2 a c_0.

Čísla c_2, c_1 a c_0 vypočteme stejným způsobem – rekurzivní algoritmus.

Ukončení rekurze: $n = 1$ nebo čísla a, b lze násobit pomocí HW.

Násobení velkých celých čísel – počet násobení

- Počet násobení nutných pro výpočet součinu dvou n-ciferných čísel označíme jako $M(n)$.
- Výpočet součinu vyžaduje 3 násobení čísel poloviční velikosti. Násobení čísel pro $n = 1$ vyžaduje jedno násobení. Tedy

$$\begin{aligned} M(n) &= 3M\left(\frac{n}{2}\right) \text{ pro } n > 1 \\ M(1) &= 1 \end{aligned}$$

Násobení velkých celých čísel – počet násobení (pokrač.)

- Metodou zpětné substituce pro $n = 2^k$ dostáváme

$$\begin{aligned} M\left(2^k\right) &= 3M\left(2^{k-1}\right) = 3\left[3M\left(2^{k-2}\right)\right] = 3^2 M\left(2^{k-2}\right) \\ &\vdots \\ &= 3^i M(2^{k-i}) \\ &\vdots \\ &= 3^k M(2^{k-k}) = 3^k \end{aligned}$$

Násobení velkých celých čísel – počet násobení (pokrač.)

- Vzhledem k tomu, že $k = \log_2 n$ dostáváme dále

$$M(n) = 3^{\log_2 n} = n^{log_2 3} \approx n^{1,585}$$

Poznámky

1. Pro logaritmy platí $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$.
2. Rekurze nemusí nutně pokračovat až k $n = 1$, lze skončit dříve a pro malá n použít běžný algoritmus.

Násobení velkých celých čísel – počet sčítání a odčítání

- Jak je to ale se sčítáním a odčítáním? Není nižší počet násobení vykoupen vyšším počtem sčítání a násobení?
- Označme $A(n)$ počet sčítání a odčítání při násobení dvou n ciferných čísel.
- Kromě $3A\left(\frac{n}{2}\right)$ operací nutných pro rekurzivní výpočet c_2, c_1 a c_0 potřebujeme 5 součtů a 1 odečítání (na slajdu 334 označena barevně), tedy

$$\begin{aligned} A(n) &= 3A\left(\frac{n}{2}\right) + cn \text{ pro } n > 1 \\ A(1) &= 1 \end{aligned}$$

Násobení velkých celých čísel – počet sčítání a odčítání (pokrač.)

- Podle vztahu (**??**), **Master theorem**, dostáváme

$$A(n) \in \Theta\left(n^{\log_2 3}\right)$$

- Celkový počet sčítání a odčítání roste asymptoticky stejnou rychlostí jako počet násobení.

Násobení velkých celých čísel – historie

- Autorem algoritmu je sovětský matematik Anatolij Alexejevič Karacuba (1937 – 2008), který jej představil v roce 1960.
- Do té doby převládal názor, že tradiční algoritmus je asymptoticky optimální.
- Takže má smysl se zabývat i již „vyřešenými“ problémy :-)
- Otázkou je kdy použít standardní algoritmus a kdy algoritmus založený na strategii rozděl a panuj.

Strategie řešení rozděl a panuj

Strassenovo násobení matic

Strassenovo násobení matic

- Je násobení matic pomocí strategie hrubou silou nejlepší možné?
- Složitost násobení hrubou silou je $\Theta(n^3)$.
- Asymptoticky lepší algoritmus představil Volker Strassen v roce 1969.
- Výchozí „objev“ – násobení čtvercových matix řádu 2 lze provést se 7 násobeními, na rozdíl od 8 u hrubé síly.

Strassenovo násobení matic řádu 2

$$\begin{pmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} \\ c_{1,0} & c_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{0,0} & b_{0,1} \\ b_{1,0} & b_{1,1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} m_1 + m_4 - m_5 + m_7 & m_3 + m_5 \\ m_2 + m_4 & m_1 + m_3 - m_2 + m_6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} m_1 &= (a_{0,0} + a_{1,1})(b_{0,0} + b_{1,1}) \\ m_2 &= (a_{1,0} + a_{1,1})b_{0,0} \\ m_3 &= a_{0,0}(b_{0,1} - b_{1,1}) \\ m_4 &= a_{1,1}(b_{1,0} - b_{0,0}) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} m_5 &= (a_{0,0} + a_{0,1})b_{1,1} \\ m_6 &= (a_{1,0} - a_{0,0})(b_{0,0} + b_{0,1}) \\ m_7 &= (a_{0,1} - a_{1,1})(b_{1,0} + b_{1,1}) \end{aligned}$$

Strassenovo násobení matic

- Počty operací pro matice 2×2:

	Hrubá síla	Strassen
Počet násobení	8	7
Počet sčítání a odčítání	4	18

- Násobit takto matice 2×2 je očividný nesmysl. Ale!

Strassenovo násobení matic (pokrač.)

- Vztahy můžeme přeformulovat na převod násobení matic $n \times n$ na podmatice řádu $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ takto:

$$\left(\begin{array}{c|c} C_{0,0} & C_{0,1} \\ \hline C_{1,0} & C_{1,1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A_{0,0} & A_{0,1} \\ \hline A_{1,0} & A_{1,1} \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c|c} B_{0,0} & B_{0,1} \\ \hline B_{1,0} & B_{1,1} \end{array}\right)$$

- Podmatici $C_{0,0}$ můžeme vypočítat buď jako

$$C_{0,0} = A_{0,0} \times B_{0,0} + A_{0,1} \times B_{1,0}$$

  nebo jako

$$C_{0,0} = M_1 + M_4 - M_5 + M_7$$

- Matice $M_1, \ldots M_7$ vypočteme stejným, rekurzivním, způsobem.

Strassenovo násobení matic – analýza složitosti

Počet násobení $M(n)$ pro matice $n \times n$ je dán rekurentní rovnicí:

$$\begin{aligned} M(n) &= 7M\left(\frac{n}{2}\right) \text{ pro } n > 1 \\ M(1) &= 1 \end{aligned}$$

Předpokládejme, že $n = 2^k$ a odtud dostáváme

$$\begin{aligned} M\left(2^k\right) &= 7M\left(2^{k-1}\right) = 7\left[7M\left(2^{k-2}\right)\right] = 7^2 M\left(2^{k-2}\right) \\ &\vdots \\ &= 7^i M\left(2^{k-i}\right) \\ &\vdots \\ &= 7^k M(2^{k-k}) = 7^k. \end{aligned}$$

Protože $k = \log_2 n$ a tudíž

$$M(n) = 7^{\log_2 n} = n^{\log_2 7} \approx n^{2.807} < n^3$$

Strassenovo násobení matic – analýza složitosti, sčítání

- Neroste ale počet sčítání $A(n)$ pro matice $n \times n$ příliš rychle?
- Pro násobení matic $n \times n$ potřebujeme:
  1. vypočítat 7 podmatic řádu $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ a
  2. provést 18 sčítání/odečítání podmatic řádu $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$.

  Takže

$$\begin{aligned} A(n) &= 7A\left(\frac{n}{2}\right) + 18\left(\frac{n}{2}\right)^2 \quad \text{pro } n > 1 \\ A(1) &= 0 \end{aligned}$$

- Podle vztahu (**??**), **Master theorem**, dostáváme

$$A(n) \in \Theta\left(n^{\log_2 7}\right)$$

- Z toho plyne, že Strassenovo násobení matic má asymptotickou složitost $\Theta\left(n^{\log_2 7}\right)$, což je méně než řešení hrubou silou.

Strategie řešení rozděl a panuj

Problém nejbližší dvojice bodů

Strategie řešení rozděl a panuj

Konvexní obal množiny

Děkuji za pozornost

Literatura

1. **Železniční mapy ČR** [online]. Praha: SŽDC, 2019 [cit. 2019-11-15]. Dostupné z: *http://provoz.szdc.cz/portal/Show.aspx?path=/Data/Mapy/kjr.pdf*.
2. LEVITIN, Anany. **Introduction to the Design and Analysis of Algorithms**. 3rd ed. Boston: Pearson, 2012. ISBN 978-0-13-231681-1.
3. CORMEN, Thomas H.; LEISERSON, Charles Eric; RIVEST, Ronald L.; STEIN, Clifford. **Introduction to algorithms**. Fourth edition. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, [2022]. ISBN 978-026-2046-305.

Literatura (pokrač.)

4. WRÓBLEWSKI, Piotr. **Algoritmy**. 1. vyd. Brno: Computer Press, 2015. ISBN 978-80-251-4126-7.