Týden 12

Přednáška

Aproximační algoritmy

Přiblížili jsme si elementární základy zachycené v sekci 10.3.

Cvičení

V první části cvičení se píše **zápočtová písemka**.

Příklad 12.1

1. Zformulujte hltavý aproximační algoritmus pro problém TSP (jdi vždy do nejbližšího dosud nenavštíveného města ...). Prokažte, že tento algoritmus je polynomiální (tedy má polynomiální časovou složitost). Ukažte instanci, v níž algoritmus vydá cestu, která je více než dvakrát delší než optimální cesta. (Vaše instance nemusí splňovat trojúhelníkovou nerovnost.)

2. Vysvětlete, proč algoritmus "sestroj minimální kostru a vydej vrcholy v pořadí odpovídajícím průchodu kostry=stromu (do hloubky)" má v případě splnění trojúhelníkové nerovnosti aproximační poměr (nejvýš) 2.

Příklad 12.2

1. Zformulujte problém minimálního vrcholového pokrytí grafu (MinVertexCover). Nejprve si uvědomte souvislost s problémem maximální nezávislé množiny (MaxIndependentSet). (Nápověda: uvažte vlastnost množiny $V \setminus C$, kde C je vrcholovým pokrytím grafu $G = (V, E)$.) Připomeňte si NP-úplnost (rozhodovacích verzí) obou problémů.

2. Ukažte příklad, kdy hladový algoritmus pro (MinVertexCover), tj. "opakovaně vybírej vrchol, který pokrývá nejvíce dosud nepokrytých hran", nedojde k optimu. Měli by jste být schopni zrekonstruovat i příklad (z přednášky) ukazující, že tento algoritmus má aproximační poměr horší než 2 (ve skutečnosti horší než jakákoli konstanta).

3. Vysvětlete, proč algoritmus "opakovaně vybírej dvojici dosud nevybraných vrcholů, které jsou spojeny hranou" je (polynomiálním) aproximačním algoritmem pro MinVertexCover s aproximačním poměrem nejvýš 2. (Tedy MinVertexCover$\in$APX(2).)

4. Zjistěte a zdůvodněte, zda z platnosti MinVertexCover$\in$APX(2) plyne podle výše zkoumané souvislosti také MaxIndependentSet$\in$APX(2). (Nápověda. Využitím hlubokých výsledků [tzv. PCP teorému] se ukázalo, že z příslušnosti MaxIndependentSet k APX(c) pro jakoukoli konstantu c by plynulo $\mathsf{PTIME} = \mathsf{NPTIME}$.)