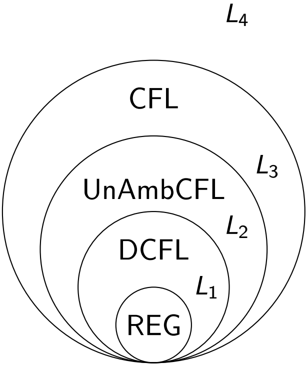
# Hierarchie jazyků




$$L_4 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

$$L_3 = \{a^i b^j c^k \mid i = j \vee j = k\}$$

$$L_2 = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

$$L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$$

# Uzávěrové vlastnosti třídy CFL

Snadnými konstrukcemi se prokáže, že CFL je uzavřena např. vůči těmto operacím:

- sjednocení ($S \longrightarrow S_1 \mid S_2$)
- zřetězení ($S \longrightarrow S_1 S_2$)
- iterace ($S \longrightarrow \varepsilon \mid S_1 S$)
- zrcadlový obraz ($A \longrightarrow \alpha \ \ldots\ A \longrightarrow (\alpha)^R$ )

CFL ale není uzavřena např. vůči

- průniku ($\{a^i b^j c^k \mid i = j\} \cap \{a^i b^j c^k \mid j = k\} = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$)
- doplňku (z předchozího díky de Morganovým pravidlům; konkrétně např. doplňky jazyků $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ či $\{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$ jsou bezkontextové, ale doplňky těchto doplňků [tedy tyto jazyky] bezkontextové nejsou)

# Pumping lemma pro bezkontextové jazyky

*Věta.* Nechť $L$ je bezkontextový jazyk. Pak existuje přirozené číslo $n$ tž. každé slovo $z \in L$, $|z| \geq n$, (tedy každé 'dlouhé' slovo z jazyka $L$) lze psát ve tvaru $z = uvwxy$, přičemž platí

- $vx \neq \varepsilon$,
- $|vwx| \leq n$,
- pro vš. $i \geq 0$ je $uv^iwx^iy \in L$.

Např. pro jazyky

- $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$
- $\{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$
- $\{\, 0^m 1^n 0^m \mid m = 2n \,\}$

se dá snadno ukázat, že bezkontextové nejsou.

# (Výpočetní) problémy, rozhodovací (ANO/NE) problémy

Název: Zdvojení slova v abecedě $\{a, b\}$.
Vstup (Instance): $w \in \{a, b\}^*$.
Výstup: $ww$.

Název: Příslušnost k jazyku $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$.
Vstup: $w \in \{a, b, c\}^*$.
Výstup: $\textsc{Ano}$, když $w \in L$, $\textsc{Ne}$ jinak.

Název: Příslušnost k jazyku $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$.
Vstup: $w \in \{a, b, c\}^*$.
Otázka: je $w \in L$ ?

Název: Ekvivalence bezkontextových gramatik.
Vstup: dvě BG $G_1, G_2$.
Otázka: je $L(G_1) = L(G_2)$ ?

# Turingovy stroje

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$$

$\Sigma \subseteq \Gamma$; $\Gamma \smallsetminus \Sigma$ vždy obsahuje speciální (prázdný) symbol $\square$

$$\delta : (Q - F) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{-1, 0, +1\}$$

(základní varianta je tedy *deterministický* Turingův stroj)

Příklad TS (tedy "programu", de facto množiny instrukcí), rozhodujícího příslušnost k jazyku $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$:

$$\begin{array}{l} (q_0, a) \to (q_1, \bar{a}, +1) \\ (q_1, x) \to (q_1, x, +1) \ \mathit{pro}\ x \in \{a, \bar{b}\} \\ (q_1, b) \to (q_2, \bar{b}, +1) \\ \ldots \end{array}$$

výpočet = (legální) posloupnost konfigurací ...
$(q_0 aaabbbccc) \vdash (\bar{a} q_1 aabbbccc) \vdash (\bar{a} a q_1 abbbccc) \vdash (\bar{a} a a q_1 bbbccc) \ldots$
$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ definuje *částečné zobrazení* $f_M : \Sigma^* \to \Gamma^*$.

# Problémy řešitelné Turingovými stroji

Tabulka problému $P$ ...... I/O tabulka Turingova stroje $M$ (zobrazení $f_M$) (výstup pro $w$ je nedefinován, označeno $\perp$, když výpočet $M$ pro $w$ je nekonečný)

| Vstup | Příslušný defin. výstup |
|---|---|
| $\varepsilon$ | $\varepsilon$ |
| 0 | 00 |
| 1 | 11 |
| 00 | 0000 |
| 01 | 0101 |
| 10 | 1010 |
| 11 | 1111 |
| 000 | 000000 |
| ... | ... |

| Vstup | Výstup výpočtu nebo $\perp$ |
|---|---|
| $\varepsilon$ | |
| 0 | |
| 1 | |
| 00 | |
| 01 | |
| 10 | |
| 11 | |
| 000 | |
| ... | ... |

Problém $P$ je *"turingovsky" řešitelný*, jestliže existuje TS $M$, jehož I/O tabulka se rovná tabulce $P$ (stroj $M$ ke každému vstupu vydá výstup specifikovaný problémem $P$)

# Rozhodovací (ANO/NE) problémy

ANO/NE problém je rozhodnutelný, jestliže existuje Turingův stroj, který ho rozhoduje (I/O tabulka [I/O zobrazení] stroje se rovná tabulce [funkci] specifikované problémem .... ).

Název: Sedmičky v Ludolfově čísle $\pi$
Vstup: přirozené číslo $k$
Otázka: Existuje v desetinném rozvoji čísla $\pi$ úsek sedmiček délky $k$ ?

| Vstup | Výstup | Vstup | Výstup | Vstup | Výstup | Vstup | Výstup |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | Ano | 0 | Ano | 0 | Ano | 0 | Ano |
| 1 | Ano | 1 | Ne | 1 | Ano | 1 | Ano |
| 2 | Ano | 2 | Ne | 2 | Ne | 2 | Ano |
| 3 | Ano | 3 | Ne | 3 | Ne | 3 | Ne |
| 4 | Ano | 4 | Ne | 4 | Ne | 4 | Ne |
| 5 | Ano | 5 | Ne | 5 | Ne | 5 | Ne |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

...

Vidíme, že problém je rozhodnutelný, i když neznáme algoritmus ...

# Church-Turingova teze

Algoritmus $=$ Turingův stroj

algoritmická neřešitelnost
(algoritmická) nerozhodnutelnost

# Simulace mezi variantami Turingových strojů

Dvoupáskový Turingův stroj (2P-TS) $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$, kde

$$\delta : (Q - F) \times \Gamma \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{-1, 0, +1\} \times \Gamma \times \{-1, 0, +1\}\,,$$

Příklad (zdvojení slova):

$$(q_0, x, \square) \to (q_0, x, +1, x, +1) \textit{ pro } x \in \{a, b\}$$
$$(q_0, \square, \square) \to (q_1, \square, -1, \square, 0)$$
$$(q_1, x, \square) \to (q_1, x, -1, \square, 0) \textit{ pro } x \in \{a, b\}$$
$$(q_1, \square, \square) \to (q_2, \square, +1, \square, 0)$$
$$(q_2, x, \square) \to (q_2, x, +1, x, +1) \textit{ pro } x \in \{a, b\}$$
$$(q_2, \square, \square) \to (q_{halt}, \square, 0, \square, 0)$$

Obecný dvoupáskový Turingův stroj (2P-TS) $M$ lze simulovat jednopáskovým dvouhlavým Turingovým strojem (1P-2H-TS) $M'$. Stroje $M$, $M'$ mají tedy stejné *(vstupně/výstupní) chování*, tj. realizují tutéž (částečnou) funkci $f_M = f_{M'}$ (mají tutéž I/O tabulku).
Obecný 1P-2H-TS $M'$ lze simulovat standardním strojem, tedy jednopáskovým jednohlavým Turingovým strojem.

# Omezení abecedy

Bez ztráty obecnosti se můžeme omezit na Turingovy stroje s abecedami
$\Sigma = \{0, 1\}$,
$\Gamma = \{0, 1, \Box\}$,

jejichž I/O zobrazení je typu

$\{0, 1\}^* \to \{0, 1\}^* \cup \{\bot\}$

# Nerozhodnutelné problémy

Název:Halting Problem
Vstup: Turingův stroj $M$, vstupní slovo $w$
Otázka: Zastaví se (výpočet stroje) $M$, když začne pracovat na (vstupním) slově $w$ ?

Název:Diagonal Halting Problem
Vstup: Turingův stroj $M$
Otázka: Zastaví se (výpočet stroje) $M$, když začne pracovat na (vstupním) slově, které je kódem $M$ ?