Optimalizační problémy

Ke každému vstupu množina přípustných řešení,
na nich definována cílová funkce (objective function),
hledaným výstupem je (nějaké) optimální řešení
(tj. s minimální, či maximální, hodnotou cílové funkce).

Příklady:
- minimální kostra v (hranově-ohodnoceném) grafu
- problém obchodního cestujícího

U min. kostry hltavý (greedy) přístup vede k řešícímu polynomiálnímu algoritmu.
Jak je o u TSP ?

Název: TSP (problém obchodního cestujícího) (Ano/Ne verze)
Vstup: množina „měst“ $\{1, 2, \ldots, n\}$, přir. čísla („vzdálenosti“) d_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$); dále číslo ℓ („limit“).
Otázka: existuje „okružní jízda“ dlouhá nejvýše ℓ, tj. existuje permutace $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$
tž. $d(i_1, i_2) + d(i_2, i_3) + \cdots + d(i_{n-1}, i_n) + d(i_n, i_1) \leq \ell$?

Nedeterministické algoritmy (Turingovy stroje)

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$, kde

- Q je konečná neprázdná množina *stavů*,
- Σ je konečná neprázdná množina *vstupních symbolů*,
- Γ je konečná neprázdná množina *páskových symbolů*, kde $\Sigma \subseteq \Gamma$ a v $\Gamma \smallsetminus \Sigma$ je (přinejmenším) speciální znak $\Box$ (prázdný znak [blank]),
- $q_0 \in Q$ je *počáteční stav*,
- $F \subseteq Q$ je množina *koncových stavů*,
- $\delta : (Q \smallsetminus F) \times \Gamma \to \mathcal{P}_{fin}(Q \times \Gamma \times \{-1, 0, +1\})$ je přechodová funkce.

(jeden) výpočet pro $w \in \Sigma^*$:
$q_0 w = C_0 \vdash_M C_1 \vdash_M \cdots \vdash_M C_m = uqv$, kde $q \in F$ (či nekonečný výpočet)

Definice relace $\vdash_M$ (píšeme jen $\vdash$)
jestliže $\delta(q, a) \ni (q', a', +1)$, což píšeme $(q, a) \to (q', a', +1)$, tak
$ubqav \vdash uba'q'v$,
jestliže $(q, a) \to (q', a', 0)$, tak $ubqav \vdash ubq'a'v$,
jestliže $(q, a) \to (q', a', -1)$, tak $ubqav \vdash uq'ba'v$.

Časová složitost nedeterm. Tur. strojů. Třída NPTIME.

Časová složitost NTM (nedet. Tur. stroje) M je funkce $T_M : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\perp\}$, kde $T_M(n)$ je délka (počet kroků) nejdelšího výpočtu M nad vstupem velikosti n.

$\mathcal{NT}(f(n))$ je třída (ANO/NE) problémů rozhodovaných nedeterm. Tur. stroji s časovou složitostí v $O(f(n))$.

(Připomenutí. V případě pozitivní instance problému alespoň jeden výpočet příslušného algoritmu úspěšně skončí. V případě negativní instance všechny výpočty skončí neúspěšně.)

NPTIME $= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{NT}(n^k)$ … třída problémů rozhodovaných nedeterministickými polynomiálními algoritmy.

Příklad nedeterm. polynom. algoritmu rozhodujícího problém SAT (kde [] značí nedeterm. výběr):

Vstup: booleovská formule F (v cnf) s proměnnými $x_1, x_2, \ldots, x_m$

Postup: $x_1 := 0$ [] $x_1 := 1$; $x_2 := 0$ [] $x_2 := 1$; …; $x_m := 0$ [] $x_m := 1$;
vyhodnoť $F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$; (* jednoduchým polynomiálním algoritmem *)
když výsledek je 1 (true), vydej Ano, když 0 (false), vydej Ne.

Polynomiální převeditelnost mezi problémy

Mějme ANO/NE problémy P_1, P_2. Řekneme, že problém P_1 je *polynomiálně převeditelný* na problém P_2, což označujeme

$$P_1 \lhd P_2,$$

jestliže existuje (převádějící) *polynomiální* algoritmus A, který pro libovolný vstup w problému P_1 sestrojí vstup problému P_2, označme jej $A(w)$, přičemž platí, že odpověď na otázku problému P_1 pro vstup w je $\textsc{Ano}$ právě tehdy, když odpověď na otázku problému P_2 pro vstup $A(w)$ je $\textsc{Ano}$.

NP-obtížnost (hardness) a NP-úplnost (completeness)

Tvrzení. Složení polynomů je polynom.
(Když funkce f a g typu $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jsou polynomy, tak funkce $h(x) = g(f(x))$ je polynom.)

Tvrzení. $P \triangleleft Q$ a $Q \in$ PTIME implikuje $P \in$ PTIME.
$P \triangleleft Q$ a $Q \in$ NPTIME implikuje $P \in$ NPTIME.

Problém Q nazveme NP-těžkým, pokud každý problém ve třídě NP lze na problém Q polynomiálně převést, tedy pokud platí $\forall P \in$ NPTIME : $P \triangleleft Q$.

Problém Q nazveme NP-úplným, pokud je NP-těžký a náleží do třídy NP.

Věta. (Cook) SAT je NP-úplný.

Tvrzení. Když $P \triangleleft Q$ a P je NP-těžký, tak Q je NP-těžký.