Šachy jsou „řešitelné v polynomiálním prostoru“

MaBilyVS(Pozice, NaTahu, Limit):

if ((Pozice, NaTahu) představuje mat Černému) return ANO;
if ((Pozice, NaTahu) představuje pat nebo mat Bílému nebo Limit=0) return NE;
if (NaTahu=Bílý) {Postupně pro každý tah Bílého v Pozice zavolej MaBilyVS(Pozice', Černý, Limit), kde Pozice' vznikne z Pozice provedením příslušného tahu; když je v nějakém případě vráceno ANO, tak return ANO, jinak return NE};
if (NaTahu=Černý) {Postupně pro každý tah Černého zavolej MaBilyVS(Pozice', Bílý, Limit-1); když je ve všech případech vráceno ANO, tak return ANO, jinak return NE}.

QBF (neboli Q-SAT)

Název: QBF (problém pravdivosti [plně] kvantifikovaných booleovských formulí)
Vstup: $(\exists x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)(\forall x_4)\ldots(\exists x_{2n-1})(\forall x_{2n})\mathcal{F}(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$, kde $\mathcal{F}(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ je booleovská formule v konjunktivní normální formě.
Otázka: je daná (kvantifikovaná) formule pravdivá?

Pozn. pokud formule není plně kvantifikovaná, ptáme se, zda je splnitelná (odtud Q-SAT).

Přímočarému řešícímu algoritmu stačí polynomiální prostor.

Prostorová složitost. Třída PSPACE.

Přirozeně lze chápat

prostorovou složitost Turingova stroje M jako funkci $S_M : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

tak, že $S_M(n)$ udává počet navštívených políček pásky při výpočtu stroje M nad vstupem velikosti (tj. délky) n v *nejhorším případě* (worst-case complexity).

$\mathcal{S}(f(n))$ je třída (ANO/NE) problémů rozhodovaných Tur. stroji s časovou složitostí v $O(f(n))$.

PSPACE $= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{S}(n^k)$ ... třída problémů rozhodovaných algoritmy s polynomiální prostorovou složitostí.

Snadno rozšíříme na *nedeterministické* Turingovy stroje a definujeme NPSPACE.

Ze Savitchovy věty (viz dále) vyplývá PSPACE =NPSPACE.

Jádro Savitchovy věty. Nechť $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ je nedet. TS, jehož prostorová složitost je omezena polynomem p. Nechť $c \in \mathbb{N}$ je takové, že všech možných konfigurací uqv stroje M, kde $|uv| \leq \ell$, je nejvýše $2^{c\ell}$.

```
function XY (w: vstup stroje M)
  function R (n:int, C,C': konfigurace stroje M, k:int)
    if k=0 then
      if C = C' or C |- C'
        (* M muze nejvys jednim krokem prejit z C do C' *)
        then return TRUE else return FALSE
    if k>0 then
      for all C'' of size p(n) do
        if R(n,C,C'',k-1) and R(n,C'',C',k-1)
        then return TRUE
      return FALSE (* end of functin R *)
  for all C of size p(n) do
    if (C je koncova) and R(|w|,q0w,C,c.p(|w|)) return TRUE
  return FALSE
```

Savitchova věta (v užší verzi)

Věta. Ke každému nedeterministickému Turingovu stroji M s prostorovou složitostí $O(n^k)$ lze sestrojit deterministický Turingův stroj M' s prostorovou složitostí $O(n^{2k})$, který pro zadaný vstup w (stroje M) zjistí, zda se pro něj M může dostat do koncové konfigurace.

Důsledek. PSPACE $=$ NPSPACE.

PSPACE-úplnost

Tvrzení. $P \lhd Q$ a $Q \in$ PSPACE implikuje $P \in$ PSPACE.

Problém Q nazveme PSPACE-těžkým, pokud každý problém ve třídě PSPACE lze na problém Q polynomiálně převést, tedy pokud platí $\forall P \in \text{PSPACE} : P \lhd Q$.

Problém Q nazveme PSPACE-úplným, pokud je PSPACE-těžký a náleží do třídy PSPACE.

Věta. QBF (či Q-SAT) je PSPACE-úplný.

Tvrzení. Když $P \lhd Q$ a P je PSPACE-těžký, tak Q je PSPACE-těžký.

Jiný příklad:
Tvrzení. Problém Eq-NFA (ekvivalence nedeterministických konečných automatů) je PSPACE-úplný.

Vybrané třídy složitosti

LOGSPACE $\subseteq$ NLOGSPACE $\subseteq$

$\subseteq$ PTIME $\subseteq$ NPTIME $\subseteq$ PSPACE $=$ NPSPACE $\subseteq$

$\subseteq$ EXPTIME $\subseteq$ NEXPTIME $\subseteq$ EXPSPACE $=$ NEXPSPACE $\subseteq \ldots$

Co je LOGSPACE? ...
Je potřeba definovat pracovní pásku ... čtení vstupu se do prostorové složitosti nepočítá ...

Např.
EXPSPACE $= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{S}(2^{n^k})$

Příklad EXPSPACE-úplného problému:

Název: ekvivalence regulárních výrazů s mocněním (RE^2)
Vstup: dva regulární výrazy, v nichž je možné použít mocnění (tzn. je možno psát α^2 místo $\alpha \cdot \alpha$).
Otázka: reprezentují zadané výrazy tentýž jazyk?

Příklad superexponenciálního rozhodnutelného problému

Název: problém pravdivosti teorie sčítání (ThAdd)
Vstup: formule jazyka 1. řádu užívající jediný „nelogický“ symbol – ternární (tj. 3-ární) predikátový symbol $PLUS$.
Otázka: je daná formule pravdivá pro množinu $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, kde $PLUS(a, b, c)$ je interpretováno jako $a + b = c$?

Nerozhodnutelnost aritmetiky (se sčítáním a násobením)

Přidáme-li ke sčítání i násobení ...

Název: problém pravdivosti v aritmetice
Vstup: formule jazyka 1. řádu užívající dva nelogické symboly – ternární predikátové symboly $PLUS$ a $MULT$.
Otázka: je daná formule pravdivá pro množinu $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$,
kde $PLUS(a, b, c)$ je interpretováno jako $a + b = c$
a $MULT(a, b, c)$ je interpretováno jako $a \cdot b = c$?