Optimalizační problémy (připomenutí)

Ke každému vstupu množina přípustných řešení,
na nich definována cílová funkce (objective function),
hledaným výstupem je (nějaké) optimální řešení
(tj. s minimální, či maximální, hodnotou cílové funkce).

Příklady:
- minimální kostra v (hranově-ohodnoceném) grafu
- problém obchodního cestujícího

U min. kostry hltavý (greedy) přístup vede k řešícímu polynomiálnímu algoritmu.
Jak je o u TSP ?

Název: TSP (problém obchodního cestujícího)
Vstup: úplný graf, s množinou vrcholů $\{1, 2, \ldots, n\}$, přir. čísla („vzdálenosti") d_{ij} ($i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$).
Výstup: permutace $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ (kde $i_1 = 1$) tž. součet $d(i_1, i_2) + d(i_2, i_3) + \cdots + d(i_{n-1}, i_n) + d(i_n, i_1)$ je nejmenší možný.

Aproximační algoritmy

Jde nám o řešení NP-těžkých optimalizačních problémů (např. TSP).

Potřebujeme polynomiální algoritmus A, který k zadanému vstupu (instanci) I vydá „pokud možno co nejlepší“ přípustné řešení $A(I)$.

Optimální řešení $s_{opt}(I)$ má hodnotu (cílové funkce) $f(I, s_{opt}(I))$, označme $m(I) = f(I, s_{opt}(I))$.
Pro algoritmus A označme $m_A(I) = f(I, A(I))$.

Jde nám o co nejlepší (nejmenší) *aproximační poměr*:
v případě minimalizačního problému o co nejmenší $\frac{m_A(I)}{m(I)} \geq 1$,
v případě maximalizačního problému o co nejmenší $\frac{m(I)}{m_A(I)} \geq 1$.

APX(c) (pro $c \in \mathbb{N}$) ... třída optimalizačních problémů, pro něž existují (polynomiální) aproximační algoritmy s aproximačním poměrem $\leq c$.

APX je sjednocení APX(c) pro všechna $c \in \mathbb{N}$.

Aproximovatelnost problému TSP

Tvrzení. Jestliže PTIME $\neq$ NPTIME, tak TSP$\notin$APX.
Důkaz. .... využití techniky "mezer" při převodu z problému hamiltonovské kružnice ...

Δ-TSP ... TSP, kde v instancích je požadováno splnění trojúhelníkové nerovnosti.

Tvrzení. Δ-TSP$\in$APX(2).
Důkaz. .... využití minimální kostry ... (mj. ilustrováno jednou z animací.)

Poznámka. Hladový algoritmus ("jdi vždy do nejbližšího nenavštíveného vrcholu") nemá kostantní aproximační poměr ani pro Δ-TSP.

Tvrzení. (Christofides) Δ-TSP$\in$APX(1.5).
Důkaz. .... využití minimální kostry a minimálního váženého párování na vrcholech lichého stupně v kostře ... (a Eulerovy kružnice ....).

Problémy MinVertexCover a MaxIndSet

Název: MinVertexCover (minimální vrcholové pokrytí)
Vstup: neorient. graf $G = (V, E)$.
Výstup: nejmenší množina $C \subseteq V$ taková, že každá hrana $e \in E$ je incidentní s C (pro každou hranu $e = (u, v)$ platí $u \in C$ nebo $v \in C$).

Název: MaxIndSet (maximální nezávislá množina)
Vstup: neorient. graf $G = (V, E)$.
Výstup: největší množina $I \subseteq V$ taková, že neexistuje hrana s oběma konci v I (pro každou hranu $e = (u, v)$ platí $u \notin I$ nebo $v \notin I$).

Pozorování. V grafu $G = (V, E)$ je množina $C \subseteq V$ vrcholovým pokrytím právě tehdy, když $V \smallsetminus C$ je nezávislou množinou.

Hladový algoritmus pro MinVertexCover "ber opakovaně vrchol, který pokrývá maximum dosud nepokrytých hran" nemá konstantní aproximační poměr. (Ukázali jsme příklad s poměrem $\Theta(\log n)$.)
Ale MinVertexCover$\in$APX(2): dokud lze, přidej oba konce nějaké hrany, která dosud není pokryta.
MaxIndSet$\notin$APX pokud $P \neq NP$. (Využívá se tzv. PCP teorém.)