Týden 3

Kanonické (deterministické) konečné automaty

Připomněli jsme si:

Věta. Jazyk $L \subseteq \Sigma^*$ je regulární (tzn. přijímaný konečným automatem) právě tehdy, když je množina kvocientů $\{w\backslash L \mid w \in \Sigma^*\}$ konečná.

Načrtli jsme si důkaz:
"$\Rightarrow$": Nechť $L \subseteq \Sigma^*$ je regulární, tedy $L = L(A)$ pro jistý KA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Snadno ověříme, že $q_0 \xrightarrow{w} q$ implikuje $w\backslash L = L_q$, když definujeme $L_q = \{u \in \Sigma^* \mid q \xrightarrow{u} F\}$. Množina $\{w\backslash L \mid w \in \Sigma^*\}$ má tedy nejvýše tolik prvků, kolik má A stavů.
"$\Leftarrow$": Nechť $\{w\backslash L \mid w \in \Sigma^*\} = \{L_0, L_1, \ldots, L_k\}$ (pro $k \in \mathbb{N}$); nechť přitom $L_0 = \varepsilon\backslash L = L$. Uvažujme KA $A = (Q, \Sigma, \delta, L_0, F)$, kde $Q = \{L_0, L_1, \ldots, L_k\}$, $F = \{L_i \mid \varepsilon \in L_i\}$ a $\delta(L_i, a) = a\backslash L_i$. (Jelikož $a\backslash(w\backslash L) = wa\backslash L$, je $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ dobře definována.) Indukcí podle délky slova snadno ověříme, že v automatu A máme $L_0 \xrightarrow{w} w\backslash L$ a také $L(A) = \{w \mid L_0 \xrightarrow{w} F\} = \{w \mid w \in L\} = L$ (neboť $\varepsilon \in w\backslash L \Leftrightarrow w \in L$).

Automat popsaný v části "$\Leftarrow$" je *kanonickým automatem* pro jazyk L; je vidět, že je to nejmenší konečný automat, který L přijímá. Navíc je takový nejmenší automat jednoznačně určen až na izomorfismus, tedy až na pojmenování stavů. Z úvah uvedených níže plyne algoritmická konstrukce kanonických automatů.

Redukce konečného automatu

Podívali jsme se na následující automat (který by vznikl po dotažení modulární konstrukce z první přednášky: má $3 \cdot 4 = 12$ stavů, jež vznikly přejmenováním původních dvojic).

	0	1
$\leftrightarrow s_1$	s_1	s_2
s_2	s_3	s_4
s_3	s_5	s_6
$\leftarrow s_4$	s_7	s_2
s_5	s_8	s_4
s_6	s_9	s_6
$\leftarrow s_7$	s_1	s_9
s_8	s_5	s_{10}
s_9	s_6	s_{11}
s_{10}	s_{12}	s_{10}
s_{11}	s_{11}	s_9
s_{12}	s_8	s_{11}

Rychle jsme zjistili, že všechny stavy jsou dosažitelné a promýšleli jsme, jak zjistit, zda existují dva různé stavy $q, q' \in Q = \{s_1, s_2, \ldots, s_{12}\}$ splňující $L_q = L_{q'}$. Jde tedy o zjištění,

zda pro q, q' existuje (či neexistuje) *rozlišující slovo*, tj. slovo w, pro nějž platí $q \xrightarrow{w} F$ a $\neg(q \xrightarrow{w} F)$ či naopak $\neg(q \xrightarrow{w} F)$ a $q \xrightarrow{w} F$.
Uvědomili jsme si, že se nabízí induktivní postup, při němž konstruujeme ekvivalence $\sim_0, \sim_1, \sim_2, \ldots$ na množině Q definované takto:

$$q \sim_i q' \Leftrightarrow \text{pro stavy } q, q' \text{ neexistuje rozlišující slovo délky} \leq i.$$

Každé ekvivalenci $\sim_i$ odpovídá příslušný rozklad R_i na množině Q.
Výchozí R_0 jsme hravě sestrojili; má dvě třídy, přijímající a nepřijímající stavy.

$$R_0\text{:}\quad \text{I} = \{s_1, s_4, s_7\},\ \text{II} = \{s_2, s_3, s_5, s_6, s_8, s_9, s_{10}, s_{11}, s_{12}\}$$

Pak jsme začali sestrojovat R_1 (postupem popsaným ve studijním textu).

$$R_1\text{:}\quad \text{I} = \{s_1, s_4, s_7\},\ \text{II} = \{s_2, s_5\},\quad \text{III} = \{s_3, s_6, s_8, s_9, s_{10}, s_{11}, s_{12}\}.$$

Uvědomili jsme si, že postup se opírá o toto pozorování:

> pokud pro q, q' existuje rozlišující slovo délky $i+1$, tak nutně existuje $b \in \Sigma$ (v našem případě $\Sigma = \{0, 1\}$) tak, že $q \xrightarrow{b} q''$, $q' \xrightarrow{b} q'''$ a pro q'', q''' existuje rozlišující slovo délky i.

(Pozn.: použili jsme symbol b pro proměnnou, ať si uvědomíme, že nemusíme vždy stereotypně používat a.)
Kdybychom pokračovali, zjistili bychom, že

$$R_2\text{:}\quad \text{I} = \{s_1, s_4\},\ \text{II} = \{s_7\},\quad \text{III} = \{s_2, s_5\},\quad \text{IV} = \{s_3, s_8\},\quad \text{V} = \{s_6, s_9, s_{10}, s_{11}, s_{12}\},$$

atd., až bychom dospěli k pevnému bodu, tedy k rozkladu, který se již nezjemní. Ten má 3-prvkovou třídu $\{s_6, s_9, s_{11}\}$ a pak už jen jednoprvkové třídy.
Redukcí (původně 12-stavového) automatu tedy vznikne ekvivalentní automat s 10 stavy (jeho stavy odpovídají třídám závěrečného rozkladu).
(Pozn. Na přednášce jsme postup demonstrovali na příkladu uvedeném na slidech.)

Ekvivalence konečných automatů; minimální automaty

Přemýšleli jsme, zda bychom uměli navrhnout (a naprogramovat) algoritmus řešící následující problém.

NÁZEV: *Evivalence konečných automatů*

VSTUP: dva konečné automaty A_1, A_2

VÝSTUP: ANO – jestliže $L(A_1) = L(A_2)$,
NE – jestliže $L(A_1) \neq L(A_2)$.

K jednomu možnému algoritmu nás přímo přivedla myšlenka, že u negativního případu, tedy $L(A_1) \neq L(A_2)$, by bylo dobré také ukázat protipříklad, tedy (co nejkratší) slovo w, které patří jen do jednoho z jazyků $L(A_1), L(A_2)$. Uvědomili jsme si, že takové slovo patří do jazyka

$$L = (L(A_1) - L(A_2)) \cup (L(A_2) - L(A_1)) = (L(A_1) \cap \overline{L(A_2)}) \cup (L(A_2) \cap \overline{L(A_1)})$$

a že díky dříve probraným algoritmům snadno sestrojíme A tak, že $L(A) = L$. Je nám tedy jasný algoritmus, který k zadaným A_1, A_2 sestrojí A tak, že

$$L(A_1) = L(A_2) \;\Leftrightarrow\; L(A) = \emptyset\,.$$

No a napsat proceduru (algoritmus), která o zadaném konečném automatu A zjistí, zda $L(A) = \emptyset$, hravě zvládneme (když si vzpomeneme na algoritmus pro zjišťování dosažitelných stavů; stačí prostě zjistit, zda nějaký přijímající stav je dosažitelný [z počátečního]). Ekvivalence konečných automatů se ovšem dá algoritmicky (rychle) zjišťovat i jinak. Nejprve jsme si uvedli následující přirozenou definici.

> Konečný automat A je *minimální*, jestliže neexistuje automat A', který je ekvivalentní s A (pro nějž je tedy $L(A) = L(A')$) a který má méně stavů než A.

Odvodili jsme si, že platí:

Věta. Následující podmínky pro konečný automat A jsou ekvivalentní:

1. A je minimální.
2. A je kanonický (pro jazyk $L(A)$).
3. A je redukovaný, tj. nemá nedosažitelné stavy a nemá různé stavy q, q' splňující $L_q = L_{q'}$.

Uvědomili jsme si, že algoritmus rozhodující ekvivalenci konečných automatů může být tedy založen na redukci (odstranění nedosažitelných stavů a ztotožnění stavů se stejným L_q) a na převodu do *normovaného tvaru*. (Dva automaty jsou ekvivalentní právě tehdy, když po redukci mají stejný normovaný tvar.)

Bezkontextové gramatiky

Připomeňme, že

$$(((a \cdot a) + b)^*)$$

je příklad (úplně uzávorkovaného) regulárního výrazu, který reprezentuje jazyk v abecedě $\{a, b\}$. Obecný regulární výraz nad abecedou $\{a, b\}$ je prostě řetězcem symbolů abecedy

$$\Sigma = \{a, b, +, \cdot, {}^*, (,)\}\,.$$

(Pro úplnost bychom měli přidat znaky $\emptyset, \epsilon$, ale zde se bez nich obejdeme.)
Ne každý řetězec v Σ^* je ovšem regulárním výrazem; např. řetězec "$a) + +($" regulárním výrazem není.
Snadno jsme vyvodili, že množina těchto regulárních výrazů, označovaná $RV(\{a, b\})$, není regulárním jazykem (tedy není rozpoznatelná konečným automatem). Dá se ale generovat bezkontextovou gramatikou, např.

$$R \longrightarrow \ a \mid b \mid (R + R) \mid (R \cdot R) \mid (R^*) \,.$$

Demonstrovali jsme si základní pojmy teorie bezkontextových gramatik. Ukázali jsme si *(levou) derivaci* slova $(((a \cdot a) + b)^*)$, příslušný *derivační strom*, apod.
Připomněli jsme definici *bezkontextové gramatiky* jako struktury

$$G = (\Pi, \Sigma, S, P)$$

a *jazyka generovaného gramatikou*

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow^* w\} \,.$$

Pak jsme se vrátili k jazyku $RV(\{a, b\})$ a upravili jej tak, že v příslušných řetězcích (regulárních výrazech) můžeme vynechávat tečku pro zřetězení a některé závorky podle naší výše uvedené dohody. Např. výraz $(((a \cdot a) + b)^*)$ můžeme zjednodušit na $(aa + b)^*$. Takto upravený jazyk regulárních výrazů generuje např. gramatika

$$R \longrightarrow a \mid b \mid R + R \mid R \cdot R \mid RR \mid R^* \mid (R) \,.$$

Všimli jsme si ovšem, že např. slovo $aa + b$ má v této gramatice dva různé derivační stromy; tedy tato gramatika *není jednoznačná*. Příčinou je fakt, že naše dohodnutá priorita operátorů není v uvedené gramatice reflektována.
Po jistém zamyšlení se nám podařilo navrhnout ekvivalentní gramatiku (tedy generující tentýž jazyk), která jednoznačná je; konkrétně šlo o následující gramatiku

$$\begin{aligned} R &\longrightarrow T + R \mid T \\ T &\longrightarrow FT \mid F \\ F &\longrightarrow F^* \mid (R) \mid C \\ C &\longrightarrow a \mid b \end{aligned}$$

Uvedli jsme pojem *(vnitřně) jednoznačný bezkontextový jazyk* a několik souvisejících poznámek (viz slidy).

Partie textu k prostudování

V návaznosti na část 3.3. (modulární návrh) se jedná zejména o část 3.4. (dosažitelné stavy, normovaný tvar), část 3.6. (minimalizace konečných automatů) a část 3.7. (ekvivalence konečných automatů, minimální automaty). Dále se jedná o části 4.1., 4.2., 4.3. (bezkontextové gramatiky, jednoznačné gramatiky).
(Máte si udělat přinejmenším dobrou první představu a zamyslet se nad příklady, speciálně těmi plánovanými na cvičení, ať se můžete na cvičení aktivně účastnit a případné problémy si tam objasnit.)

Cvičení

První dva příklady doplňují předchozí týden.

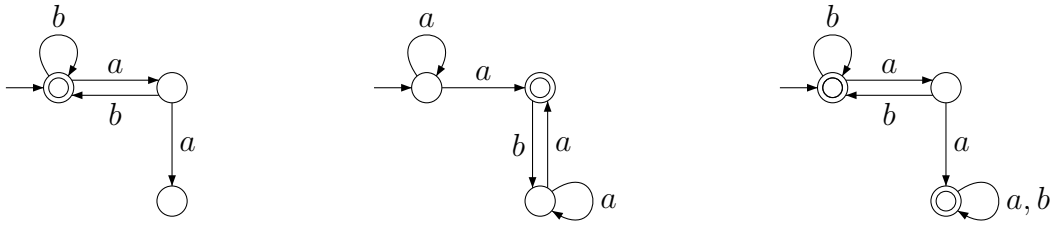
Příklad 3.1

Následující jazyky zadejte regulárními výrazy.

- $L_1 = \{01, 011, 0101, 0111\}$
- $L_2 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w$ obsahuje podslovo $abb\}$
- $L_3 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w$ začíná prefixem abc nebo končí sufixem $bcac\}$
- $L_4 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_0 \bmod 2 = 0\}$.
- $L_5 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_0 \bmod 3 = 1\}$.
- $L_6 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w$ obsahuje podslovo bab nebo $|w|_b \leq 3\}$
- $L_7 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w$ obsahuje podslovo bab a $|w|_b \leq 3\}$
- $L_8 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w$ neobsahuje podslovo $ab\}$

Příklad 3.2

Jazyky přijímané následujícími konečnými automaty zadejte regulárními výrazy.



Příklad 3.3

V příkladu 2.1. jste měli zkonstruovat automat pro jazyk
$L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w$ začíná a a končí b nebo začíná b a končí $a\}$.
Připomeňte si tento (5-stavový?) automat. Měli jste konstruovat jen dosažitelné stavy. Zkuste teď nalézt pro každou dvojici stavů $q \neq q'$ slovo w tak, že $q \xrightarrow{w} F$ a $q' \not\xrightarrow{w} F$ (tedy $q' \xrightarrow{w} (Q-F)$) či naopak $q \not\xrightarrow{w} F$ a $q' \xrightarrow{w} F$; takovému slovu w budeme říkat

rozlišující slovo pro stavy q, q'.

Povedlo se? Jestli ano, co z toho o vašem automatu vyvodíte?

Příklad 3.4

Proveďte kompletně algoritmus redukce pro automat z přednášky

	0	1
$\leftrightarrow s_1$	s_1	s_2
s_2	s_3	s_4
s_3	s_5	s_6
$\leftarrow s_4$	s_7	s_2
s_5	s_8	s_4
s_6	s_9	s_6
$\leftarrow s_7$	s_1	s_9
s_8	s_5	s_{10}
s_9	s_6	s_{11}
s_{10}	s_{12}	s_{10}
s_{11}	s_{11}	s_9
s_{12}	s_8	s_{11}

Příklad 3.5

Nalezněte všechny dvojice stavů q, q', pro něž platí $q \sim q'$, tedy $L_q = L_{q'}$.

	a	b
$\rightarrow 0$	0	1
$\leftarrow 1$	1	2
$\leftarrow 2$	3	1
3	2	4
4	2	3

	a	b
$\rightarrow 5$	5	6
6	7	5
$\leftarrow 7$	7	9
8	9	8
$\leftarrow 9$	8	7

Příklad 3.6

Připomeňme problém

NÁZEV: *Evivalence konečných automatů*

VSTUP: dva konečné automaty A_1, A_2

VÝSTUP: ANO – jestliže $L(A_1) = L(A_2)$,
NE – jestliže $L(A_1) \neq L(A_2)$.

a uvažujme následující algoritmus pro jeho řešení:

> generuj postupně (všechna) slova $w_0, w_1, w_2, \ldots$ v abecedě daných automatů; pro každé w_i přitom zjisti, zda je oběma automaty přijímáno či oběma nepřijímáno – když je jedním přijímáno a druhým nepřijímáno, skonči s výsledkem $L(A_1) \neq L(A_2)$.

Je zřejmé, že běh tohoto algoritmu neskončí v případě $L(A_1) = L(A_2)$. Lze tento nedostatek opravit tím, že necháme algoritmus probírat jen slova do délky n, kde n je součtem počtu stavů A_1 a A_2, a nenajde-li se rozlišující slovo do té doby, pak algoritmus zahlásí $L(A_1) = L(A_2)$? Pokud je tomu tak (tedy odpověď algoritmu je vždy správná), v čem je tento algoritmus zřejmě horší než algoritmy probrané na přednášce?

Příklad 3.7

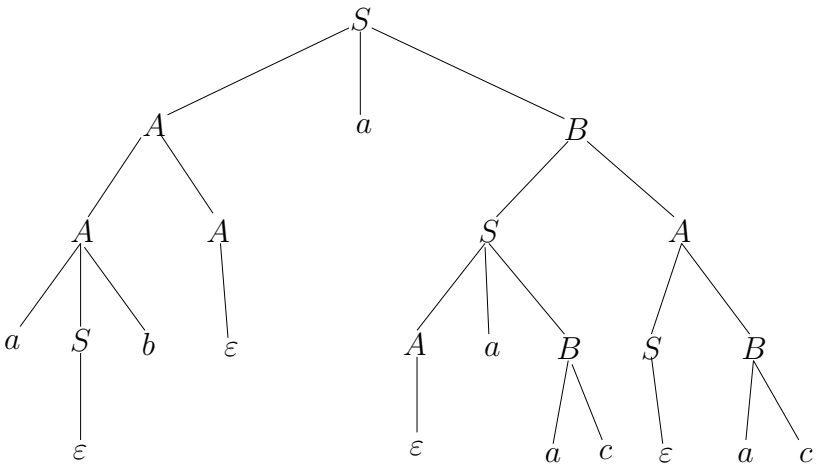
Při konstrukci ekvivalence $\sim \subseteq Q \times Q$ definované vztahem $q \sim q' \Leftrightarrow L_q = L_{q'}$ (pro automat $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, přičemž $L_q = \{w \in \Sigma^* \mid q \xrightarrow{w} F\}$), jsme de facto postupovali *koinduktivně*: vzali jsme (největší) relaci $R_0 = Q \times Q$, na ni jsme aplikovali určitý monotónní funkcionál $\mathcal{F}$, dostali jsme tedy (menší) relaci $R_1 = \mathcal{F}(R_0)$, pak jsme dostali relaci $R_2 = \mathcal{F}(R_1)$, atd., až jsme dospěli k (největšímu) pevnému bodu R (pro nějž $R = \mathcal{F}(R)$). (Monotónností funkcionálu $\mathcal{F} : 2^{Q \times Q} \to 2^{Q \times Q}$ zde rozumíme vlastnost, že pro $T_1 \subseteq T_2$ máme $\mathcal{F}(T_1) \subseteq \mathcal{F}(T_2)$.) Snažte se funkcionál $\mathcal{F}$ přesně popsat.

Příklad 3.8

Odhadněte časovou složitost algoritmu redukce konečného (deterministického) automatu. Přinejmenším argumentujte, proč je algoritmus polynomiální.

Příklad 3.9

Na obrázku je derivační strom pro slovo $w = abaaacac$ odpovídající jisté bezkontextové gramatice G.



- Vypište všechna pravidla G, jejichž existenci můžete vyvodit z daného derivačního stromu.
- Napište levé odvození (levou derivaci) slova w podle gramatiky G.
- Najděte *menší* derivační strom pro slovo $abaaacac$ a zakreslete jej tak, že všechny listy budou na stejné úrovni (tedy odvozené slovo bude celé na „jednom řádku“).
- Najděte nejlevější větev (v onom menším stromě), která obsahuje dva výskyty neterminálu B. Využijte to k důkazu, že gramatika generuje také slovo $abaac$. Pak ukažte, že gramatika také generuje slova $aba(a)ac(ac)$, $aba(a)^2ac(ac)^2$, $aba(a)^3ac(ac)^3$, ...
- Lze z dostupné informace zjistit něco ohledně jednoznačnosti gramatiky G ?

Příklad 3.10

Jaký jazyk generuje následující gramatika ? Porovnejte s gramatikou na přednášce. Je gramatika jednoznačná ?

$R \longrightarrow L \mid (RBR) \mid (RU)$
$L \longrightarrow a \mid b$
$B \longrightarrow + \mid \cdot$
$U \longrightarrow {}^*$

Příklad 3.11

Připomeňte si následující gramatiku z přednášky.

$R \longrightarrow T + R \mid T$
$T \longrightarrow FT \mid F$
$F \longrightarrow F^* \mid (R) \mid C$
$C \longrightarrow \ a \mid b$

Zvolte si nějaký (malý) regulární výraz nad abecedou $\{a, b\}$. Nakreslete nejdříve jeho syntaktický strom a poté derivační strom pro zvolený výraz podle uvedené gramatiky. (Vidíte nějaký vztah mezi oběma stromy?)

Pak alespoň neformálně argumentujte, proč je gramatika jednoznačná. (Nápověda. T (Term) reprezentuje ty regulární výrazy, které nejsou ve tvaru $R_1 + R_2$ (pro dva regulární výrazy R_1, R_2), a F (Factor) reprezentuje ty výrazy, které nejsou ve tvaru $R_1 + R_2$ ani $R_1 R_2$.)