

Týden 6

Přednáška

Vrátili jsme se nejdříve podrobněji k některým pasážím z minulé přednášky.

Nebezkontextové jazyky

Metodou obrázků derivačních stromů z části 5.3. jsme si ukázali, proč jazyk

$$L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

není bezkontextový. Porozuměli jsme tak pumping lemmatu (neboli *uvvxy*-teorému) pro bezkontextové jazyky:

Věta. Nechť L je bezkontextový jazyk. Pak existuje přirozené číslo n tž. každé slovo $z \in L$, $|z| \geq n$, (tedy každé ‘dlouhé’ slovo z jazyka L) lze psát ve tvaru $z = uvvxy$, přičemž platí

- $vx \neq \varepsilon$,
- $|vwx| \leq n$,
- pro vš. $i \geq 0$ je $uv^iwx^iy \in L$.

Intuici k poznání nebezkontextových jazyků jsme si posílili zvážením jazyků

$$L_1 = \{ww \mid w \in \{0, 1\}^*\},$$

$$L_2 = \{0^m 1^n 0^m \mid m = 2n\},$$

u nichž obou jsme usoudili, že ne všechna jejich dlouhá slova lze napsat v patřičném tvaru *uvvxy*, a že tedy nejsou bezkontextové. (U jazyka L_1 jde např. o slova tvaru $0^n 1^n 0^n 1^n$.)

Uzávěrové vlastnosti třídy CFL

Připomněli jsme si, že snadno umíme ukázat, že CFL je uzavřena vůči sjednocení.

Pak jsme si všimli, že jazyky $L_1 = \{a^i b^j c^k \mid i = j\}$ a $L_2 = \{a^i b^j c^k \mid j = k\}$ jsou bezkontextové, ale $L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ je jazyk, o němž víme, že bezkontextový není.

Tedy CFL není uzavřena na průnik. Díky de Morganovým pravidlům ihned vidíme, že CFL není uzavřena ani na doplněk.

(Jelikož $(L_1 \cap L_2) = \overline{(\overline{L_1} \cup \overline{L_2})}$, tak z uzavřenosti na doplněk by díky uzavřenosti na sjednocení vyplynula uzavřenost na průnik.)

Poznámka. Jak jsme si už řekli, třída DCFL, tj. třída jazyků rozpoznatelných deterministickými zásobníkovými automaty (přijímacími stavy), je vlastní podtřídou CFL. Dá se ukázat, že (pod)třída DCFL je uzavřena vůči doplňku; není ovšem uzavřena vůči průniku (jak dokazují výše uvedené jazyky $\{a^i b^j c^k \mid i = j\}$, $L_2 = \{a^i b^j c^k \mid j = k\}$), a tedy není uzavřena ani vůči sjednocení.

Partie textu k prostudování

Uzávěrové vlastnosti CFL (část 5.2.). Nebezkontextové jazyky (část 5.3.).

Cvičení

Příklad 6.1

Připomeňme, že jako základní jsme (u nedeterministických zásobníkových automatů) brali přijímání slova prázdným zásobníkem. Zásobníkový automat jsme definovali jako jistou strukturu $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$, kde jazykem přijímaným automatem M rozumíme jazyk

$$L(M) = \{ w \in \Sigma^* \mid \exists q \in Q : (q_0, w, Z_0) \vdash_M^* (q, \varepsilon, \varepsilon) \}.$$

U verze přijímání přijímacím stavem definujeme zásobníkový automat jako $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, kde $F \subseteq Q$, a pak definujeme

$$L(M) = \{ w \in \Sigma^* \mid \exists q \in F, \exists \alpha \in \Gamma^* : (q_0, w, Z_0) \vdash_M^* (q, \varepsilon, \alpha) \}.$$

Řekněme, že k zás. automatu $M_1 = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ přijímajícímu přijímacím stavem jazyk L chceme sestavit zás. automat M_2 přijímající jazyk L prázdným zásobníkem. Stačí prostě upravit M_1 tak, že pro každý stav $q \in F$ dodáme instrukci $(q, \varepsilon, X) \rightarrow (q, \varepsilon)$ pro každé $X \in \Gamma$? Když ne, zkuste alespoň stručně navrhnout bezpečnou úpravu ...

Příklad 6.2

Na přednášce jsme mj. ukázali, že třída CFL není uzavřena na doplněk. Existuje tedy jazyk $L \subseteq \Sigma^*$ (pro nějakou abecedu Σ), který je bezkontextový, přičemž jeho doplněk $\bar{L} = \Sigma^* - L$ bezkontextový není.

Víme, že jazyk $L_1 = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$ bezkontextový není. Zkuste prokázat, že $L_2 = \bar{L}_1$ bezkontextový je a představuje tak konkrétní příklad jazyka z CFL, jehož doplněk v CFL není.

Nápověda. Vystihněte co nejjednodušeji, jak vypadá slovo z L_2 , které má sudou délku, tedy $2d$ pro nějaké $d \geq 1$. Pak se zkuste zamyslet, zda vám pomůže následující vztah:

$$2d = (d_1 + 1 + d_2) + (d_1 + 1 + d_2) = (d_1 + 1 + d_1) + (d_2 + 1 + d_2).$$

Nakonec si tipněte, jestli se může podařit navrhnout *deterministický* zásobníkový automat přijímající L_2 .

(Pomůže vám nějak u předchozí otázky, když se dozvíte, že třída DCFL je uzavřena vůči doplňku?)

Příklad 6.3

(Na základě alespoň intuitivních argumentů) určete, které z daných jazyků jsou regulární:

jsou bezkontextové, ale ne regulární:

nejsou bezkontextové:

$$L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$$

$$L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \text{ je sudé} \}$$

$$L_3 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ obsahuje podslovo } abba\}$$

$$L_4 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w|_a = |w|_b = |w|_c\}$$

$$L_5 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \text{ je prvočíslo}\}$$

$$L_6 = \{0^m 1^n \mid m \leq 2n\}$$

$$L_7 = \{0^m 1^n 0^m \mid m = 2n\}$$