Týden 10

Přednáška

Nejdříve jsme dokončili diskusi námětů z minulé přednášky (speciálně dynamické programování).

Nedeterministické algoritmy a jejich složitost; třída NPTIME

Ujasnili jsme si pojem nedeterministického algoritmu (Turingova stroje) a definici toho, co to znamená, že nějaký nedeterministický Turingův stroj M rozhoduje daný problém P.

Také jsme přímočaře rozšířili pojem (časové) složitosti na nedeterministické stroje a definovali jsme třídu NPTIME.

Ukázali jsme si (nedeterministické) algoritmy prokazující, že problém SAT (splnitelnost booleovských formulí) a IS (Independent Set, rozhodovací verze problému nezávislé množiny v grafu) jsou v NPTIME.

Polynomiální převeditelnost; NP-úplné problémy

Již známý pojem převeditelnosti mezi problémy jsme využili v definici polynomiální převeditelnosti mezi problémy. (Příslušný převádějící algoritmus musí mít polynomiální časovou složitost, tedy časovou složitost omezenou polynomem.)

Všimli jsme si, jak může prokázaná polynomiální převeditelnost mezi problémy pomoci v určování (ne)příslušnosti k PTIME či NPTIME.

Definovali jsme pojem NP-úplného problému; problémy SAT, 3-SAT, HC, HK, 3-CG a IS jsou příklady NP-úplných problémů.

Připomenutí: animace ukazují důkaz Cookovy věty, tedy důkaz toho, že SAT je NP-úplný, a dále demonstrují SAT $\triangleleft$ 3-SAT, 3-SAT $\triangleleft$ IS, IS $\triangleleft$ HC, HC $\triangleleft$ HK (a také nyní požadovaný převod HK $\triangleleft$ TSP.)

Partie textu k prostudování

Části 8.3., 8.4., 8.5. (třída PTIME, třída NPTIME, NP-úplné problémy).

Cvičení

Příklad 10.1

Definujte pojem *polynomiální převeditelnosti* jako speciální případ dříve uvedené (algoritmické) převeditelnosti mezi problémy. (Příslušný převádějící algoritmus musí mít polynomiální časovou složitost, tedy časovou složitost omezenou polynomem.)

Vysvětlete nejdříve přesně, co máme udělat, chceme-li prokázat polynomiální převeditelnost problému HC (hamiltonovský cyklus v orientovaném grafu) na problém HK (hamiltonovská kružnice v neorientovaném grafu).

Pak to udělejte.

Příklad 10.2

Vysvětlete pojem „NP-úplný problém".
Definujte problémy SAT, 3-SAT, HC, HK, 3-CG a IS (s příklady pozitivních a negativních instancí). Tyto problémy jsou NP-úplné. U každého si alespoň uvědomte algoritmus, prokazující příslušnost k NP.

Příklad 10.3

Uvažujme následující problém (jeden z často uváděných NP-úplných problémů). (Už jsme jej v jiné souvislosti uvažovali minule.)

NÁZEV: TSP (*problém obchodního cestujícího (* ANO/NE *verze)*)

VSTUP: množina „měst" $\{1, 2, \ldots, n\}$, přir. čísla („vzdálenosti") d_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$); dále číslo ℓ („limit").

OTÁZKA: existuje „okružní jízda" dlouhá nejvýše ℓ, tj. existuje permutace $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ tž. $d(i_1, i_2) + d(i_2, i_3) + \cdots + d(i_{n-1}, i_n) + d(i_n, i_1) \leq \ell$?

Je to rozhodovací (neboli ANO/NE) verze optimalizačního problému. Odvoďte nejdříve, jak vypadá onen optimalizační problém (tedy co je jeho vstupem a co odpovídajícím výstupem).

Dále ukažte nějakou malou (ale ne úplně triviální) instanci (tedy vstup) uvedeného problému TSP, pro niž je odpověď ANO, a instanci, pro niž je odpověď NE.

Pak prokažte (návrhem konkrétního nedeterministického algoritmu), že TSP je v NP.

Nakonec zkuste vymyslet důkaz NP-obtížnosti problému TSP.
(Nápověda. Můžete využít faktu, že problém hamiltonovské kružnice (HK) je NP-úplný.)

Příklad 10.4

Uvažujme problém

NÁZEV: ILP (*problém celočíselného lineárního programování*)

VSTUP: Matice A typu $m \times n$ a sloupcový vektor b velikosti m, jejichž prvky jsou celá čísla.

OTÁZKA: Existuje celočíselný sloupcový vektor x (velikosti n) tž. $Ax \geq b$?

Ukažte nejprve nějakou malou (ale ne úplně triviální) instanci (tedy vstup) uvedeného problému ILP, pro niž je odpověď ANO, a instanci, pro niž je odpověď NE.

Vysvětlete přesně, co bychom museli udělat, kdybychom chtěli ukázat, že 3-SAT $\triangleleft$ ILP.

(Zbytek příkladu je nepovinný.)

Zbude-li čas, zkuste tuto převeditelnost dokázat. Přinejmenším ale uveďte, co bychom mohli říci o složitosti problému ILP poté, co bychom prokázali 3-SAT $\triangleleft$ ILP.

Dále pouvažujte o tom, zda ILP patří do NP.

Je to tak, ale je to příklad problému, jehož příslušnost k NP není ihned zřejmá – na rozdíl od dřívějších příkladů problémů v NP.

(Spokojíme se zde jen s odkazem na fakt, že se dá ukázat, že existuje-li řešení nerovnosti $Ax \geq b$, pak existuje i řešení „dostatečně malé“ – jeho zápis je polynomiální vzhledem k zápisu A a b; řešení se tedy dá v polynomiálním čase „uhodnout“ a ověřit.)