Převoditelnost problémů nezávislé množiny na problém hamiltonovského cyklu

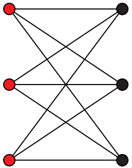
Cíle prezentace

- seznámit s problémem nezávislé množiny
- seznámit s problémem hamiltonovského cyklu
- seznámit s převodem problému P1 na problém P2 (P1 $\triangleleft$ P2)
- prezentovat polynomiální převod problému nezávislé množiny na problém hamiltonovského cyklu.

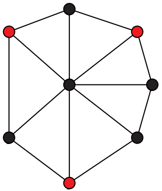
IS - Independent Set (nezávislá množina)

Nezávislá množina (IS): Je taková podmnožina množiny vrcholů grafu G, že žádná dvojice v této podmnožině netvoří hranu v grafu G.
Problém nezávislé množiny:

- Vstup: neorientovaný graf G (o n vrcholech); číslo k ($k \leq n$).
- Otázka: existuje v G nezávislá množina velikosti k (tj. množina k vrcholů, z nichž žádné dva nejsou spojeny hranou)?



pro $k=3$, existuje v G IS
pro $k=4$, neexistuje v G IS

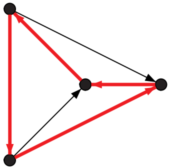


pro $k=3$, existuje v G IS
pro $k=4$, neexistuje v G IS

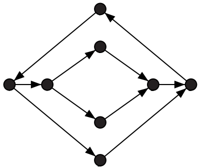
HC - Hamiltonian Circuit (hamiltonovský cyklus)

Hamiltonovský cyklus (HC): HC je uzavřená smyčka v grafu, která prochází každým vrcholem právě jednou.
Problém hamiltonovského cyklu:

- Vstup: orientovaný graf G.
- Otázka: existuje v G hamiltonovský cyklus (tj. uzavřená orientovaná cesta, procházející každým vrcholem právě jednou)?



existuje HC



neexistuje HC

Definice převodu problémů P1 na problém P2

Problém P1 je polynomiálně převeditelný na problém P2, označme P1 $\triangleleft$ P2, jestliže existuje Turingův stroj M s polynomiální časovou složitostí, který pro libovolný vstup *w* problému P1 sestrojí vstup *w*‘ problému P2, přičemž platí, že odpověď na otázku problému P1 pro vstup *w* je stejná jako odpověď na otázku problému P2 pro vstup *w*‘.

Polynomiální převod problému IS na problém HC (IS$\lhd$ HC)

graf G**, číslo** k $\longrightarrow$ **algoritmus převodu** $\longrightarrow$ **graf** H

Polynomiální převod problému IS na problém HC ($IS \lhd HC$)

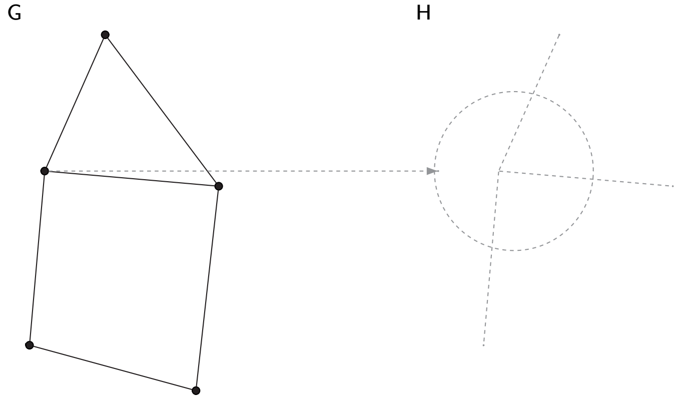
$$\textbf{graf } G\textbf{, číslo } k \rightarrow \textbf{algoritmus převodu} \rightarrow \textbf{graf } H$$
$$\downarrow$$

- Algoritmus pro jakýkoliv neorientovaný graf G (o n vrcholech) s číslem k$\leq$n, vytvoří orientovaný graf H, přičemž je zaručeno, že v G existuje nezávislá množina vrcholů (vrcholy nemají společnou hranu) velikosti k, právě když graf H obsahuje hamiltonovský cyklus (uzavřenou cestu mezi vrcholy tak, že každý vrchol projde právě jednou).
- Převod lze uskutečnit pomocí polynomiálního algoritmu.

Konstrukce grafu H z grafu G

Je dán graf G o *n* vrcholech a číslo *k* (první část konstrukce grafu H je nezávislá na číslu *k*). Tento graf G převeďme na graf H, ve kterém existuje Hamiltonovský cyklus.

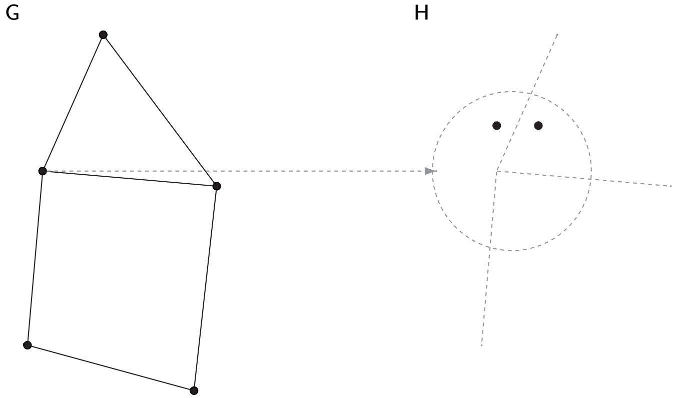
Nejprve vytvoříme orientovaný graf H. Vrcholy grafu H jsou trojice (v,e,i), kde v∈V(G), hrana *e* je incidentní s *v* a *i* je 1 nebo 0.



Konstrukce grafu H z grafu G

Je dán graf G o *n* vrcholech a číslo *k* (první část konstrukce grafu H je nezávislá na čísle *k*). Tento graf G převeďme na graf H, ve kterém existuje Hamiltonovský cyklus.

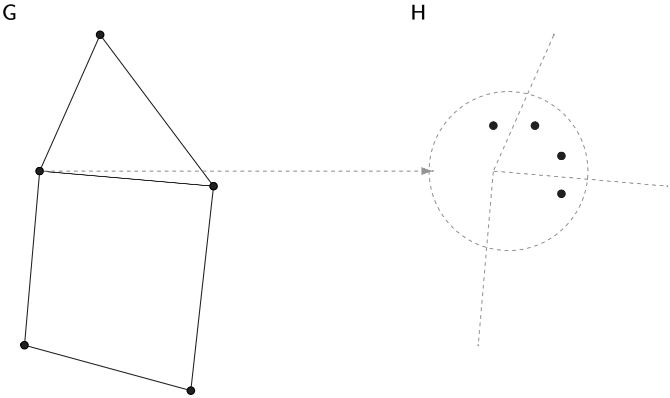
Nejprve vytvoříme orientovaný graf H. Vrcholy grafu H jsou trojice (v,e,i), kde v∈V(G), hrana *e* je incidentní s *v* a *i* je 1 nebo 0.



Konstrukce grafu H z grafu G

Je dán graf G o *n* vrcholech a číslo *k* (první část konstrukce grafu H je nezávislá na čísle *k*). Tento graf G převeďme na graf H, ve kterém existuje Hamiltonovský cyklus.

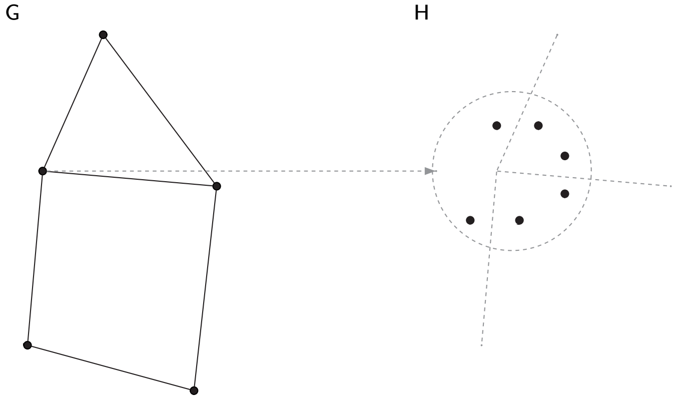
Nejprve vytvoříme orientovaný graf H. Vrcholy grafu H jsou trojice (v,e,i), kde v∈V(G), hrana *e* je incidentní s *v* a *i* je 1 nebo 0.



Konstrukce grafu H z grafu G

Je dán graf G o *n* vrcholech a číslo *k* (první část konstrukce grafu H je nezávislá na čísle *k*). Tento graf G převeďme na graf H, ve kterém existuje Hamiltonovský cyklus.

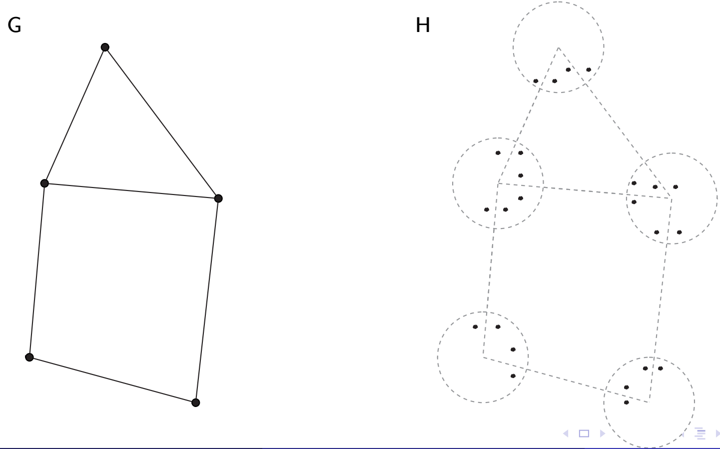
Nejprve vytvoříme orientovaný graf H. Vrcholy grafu H jsou trojice (v,e,i), kde v∈V(G), hrana *e* je incidentní s *v* a *i* je 1 nebo 0.



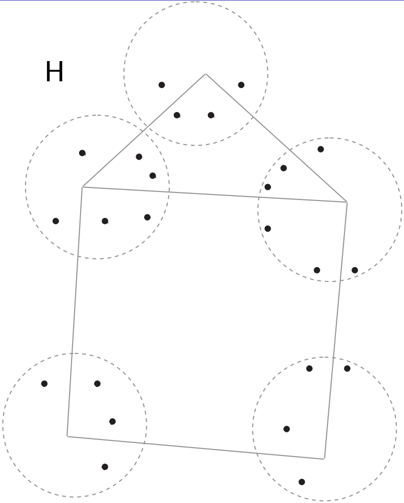
Konstrukce grafu H z grafu G

Je dán graf G o *n* vrcholech a číslo *k* (první část konstrukce grafu H je nezávislá na číslu *k*). Tento graf G převeďme na graf H, ve kterém existuje Hamiltonovský cyklus.

Nejprve vytvoříme orientovaný graf H. Vrcholy grafu H jsou trojice (v,e,i), kde v∈V(G), hrana *e* je incidentní s *v* a *i* je 1 nebo 0.



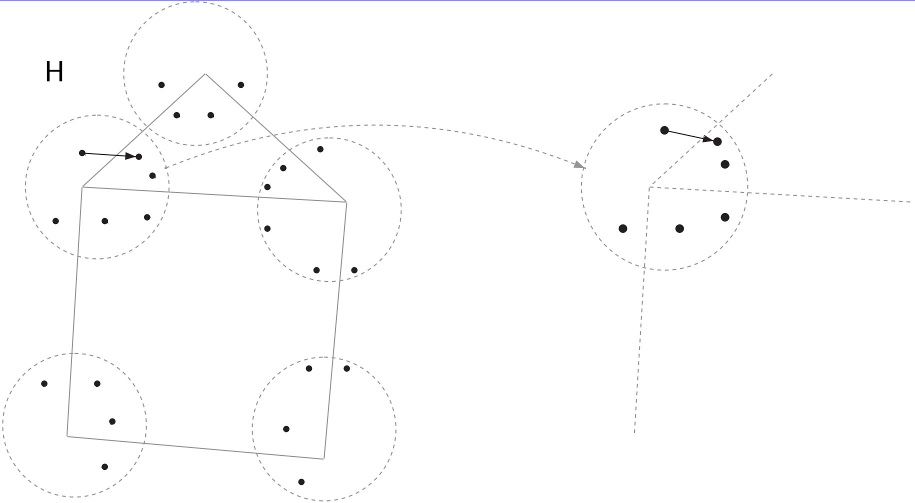
Konstrukce grafu H z grafu G



Pravidlo 1

- ((v,e,0),(v,e,1)), kde $v \in e \in E(G)$

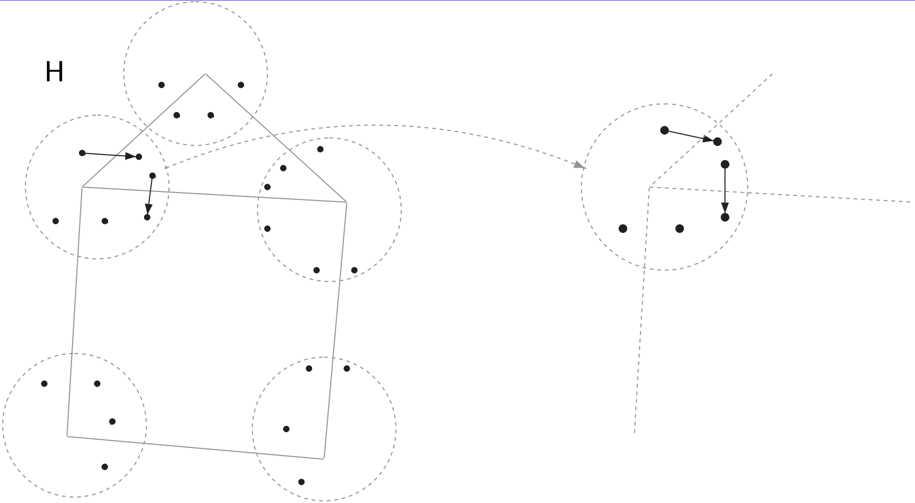
Konstrukce grafu H z grafu G



Pravidlo 1

- ((v,e,0),(v,e,1)), kde v∈e∈E(G)

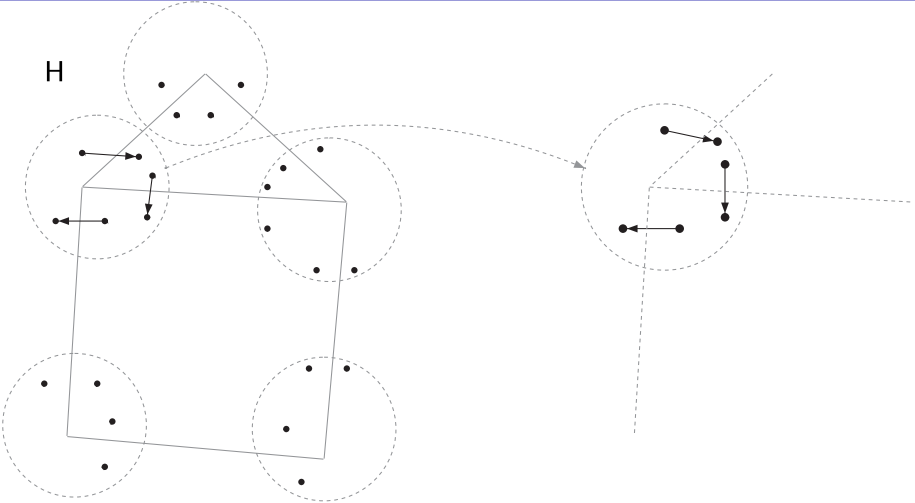
Konstrukce grafu H z grafu G



Pravidlo 1

- ((v,e,0),(v,e,1)), kde v∈e∈E(G)

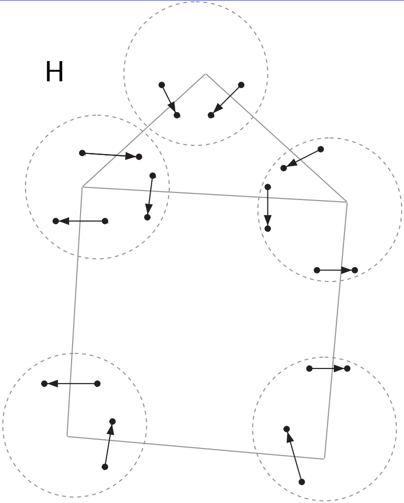
Konstrukce grafu H z grafu G



Pravidlo 1

- ((v,e,0),(v,e,1)), kde v∈e∈E(G)

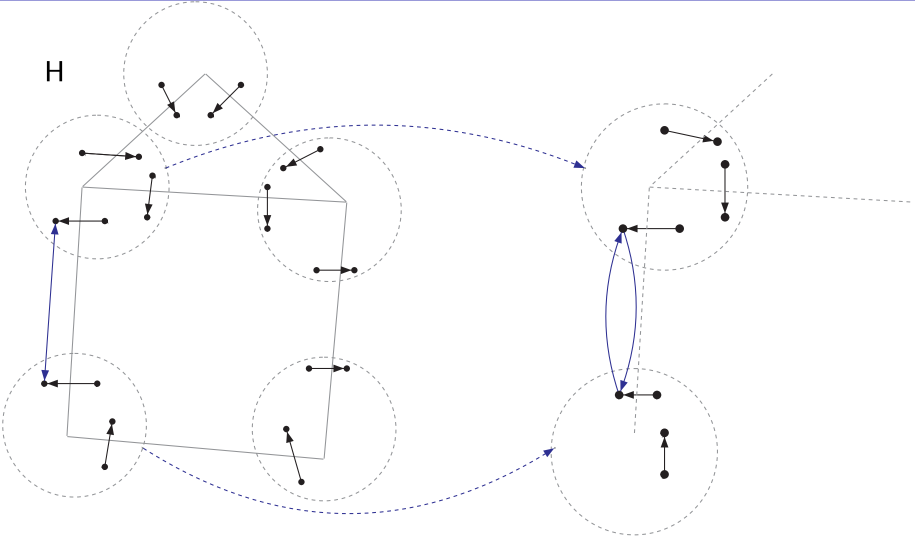
Konstrukce grafu H z grafu G



Pravidlo 1

- ((v,e,0),(v,e,1)), kde $v \in e \in E(G)$

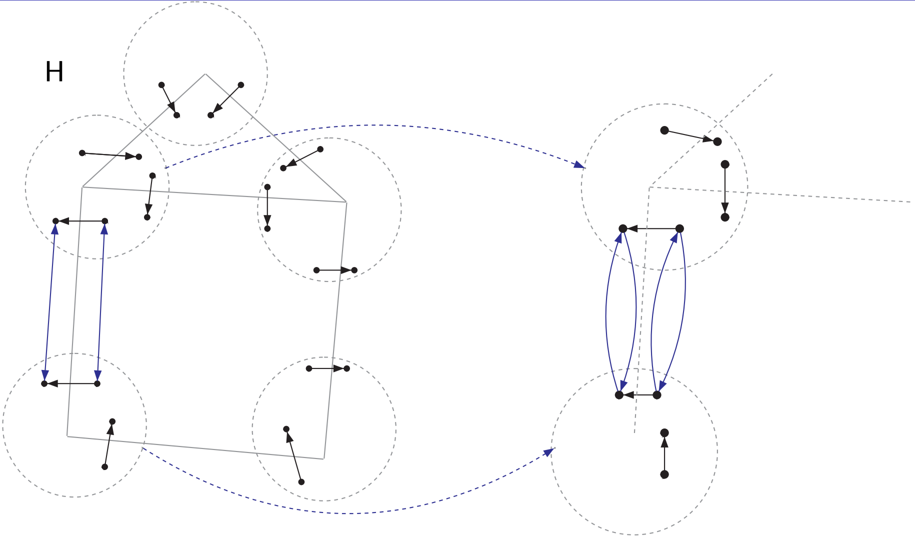
Konstrukce grafu H z grafu G



Pravidlo 2

- ((v,e,i),(w,e,i)), kde e=(v,w)∈E(G),i=0,1

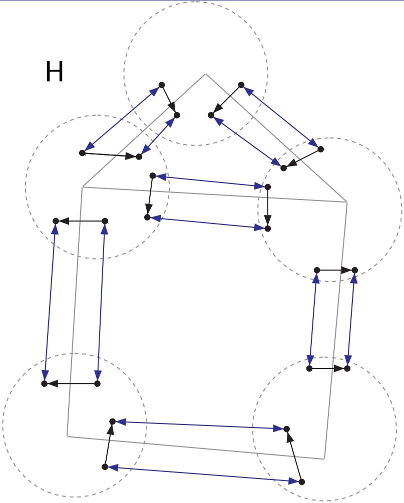
Konstrukce grafu H z grafu G



Pravidlo 2

- $((v,e,i),(w,e,i))$, kde $e=(v,w)\in E(G), i=0,1$

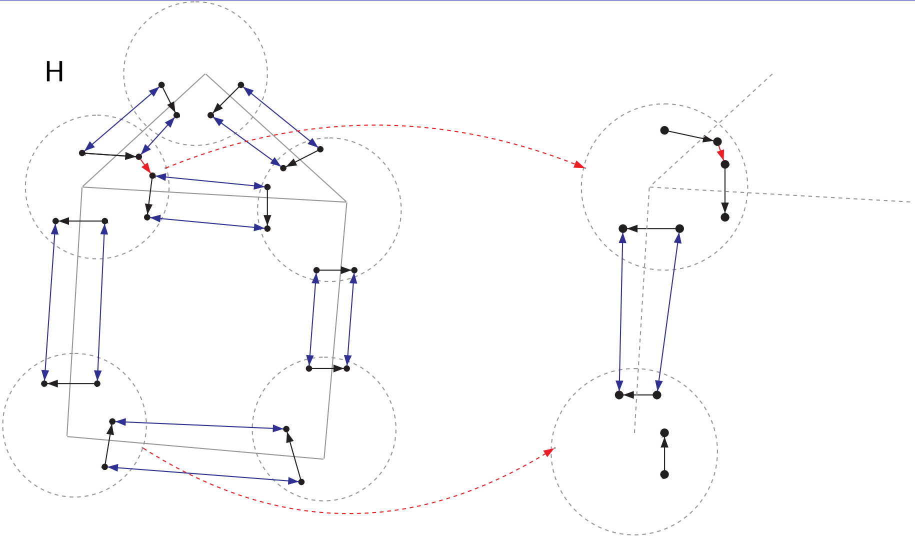
Konstrukce grafu H z grafu G



Pravidlo 2

- ((v,e,i),(w,e,i)), kde e=(v,w)$\in$E(G),i=0,1

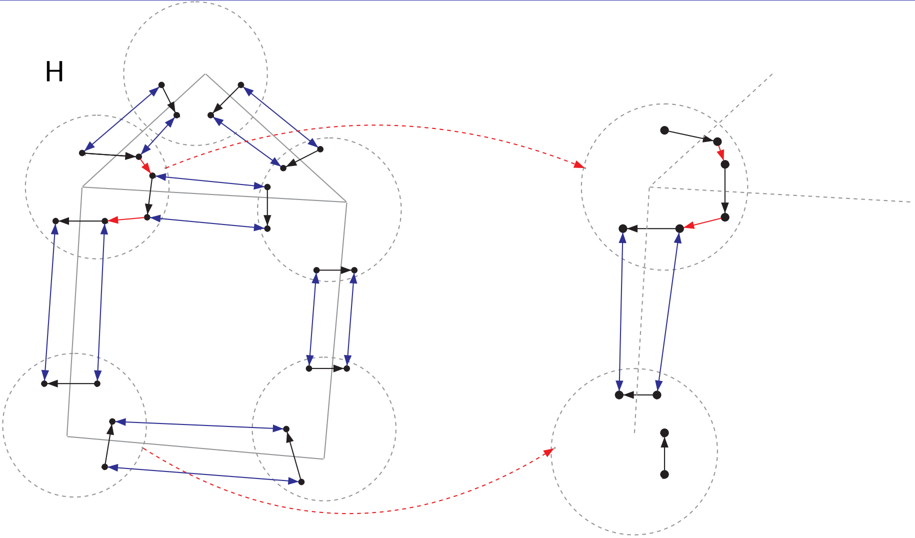
Konstrukce grafu H z grafu G



Pravidlo 3

- $((v,E_{v,j},1),(v,E_{v,j+1},0)), v \in V(G), 1 \leq j < \deg(v)$

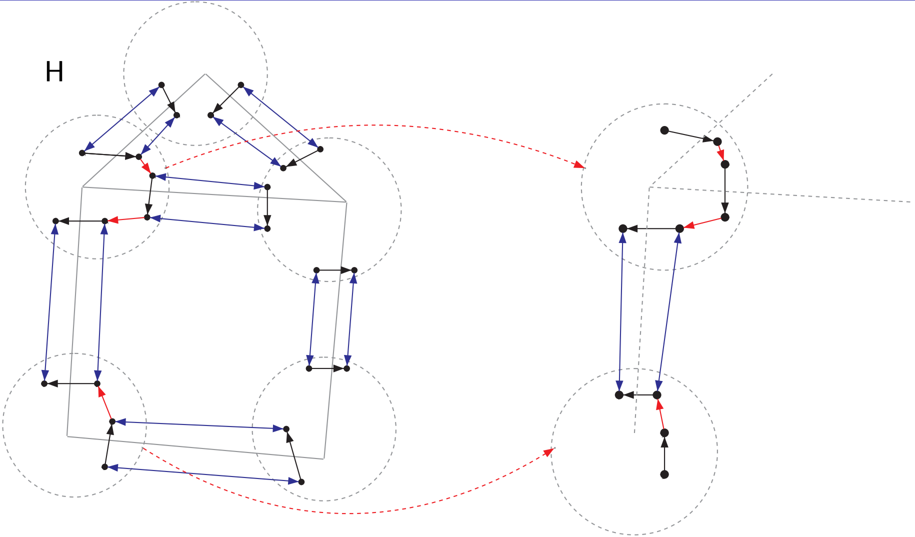
Konstrukce grafu H z grafu G



Pravidlo 3

- $((v,E_{v,j},1),(v,E_{v,j+1},0)), v \in V(G), 1 \leq j < \deg(v)$

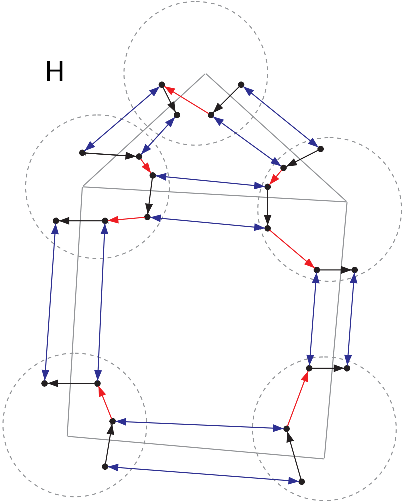
Konstrukce grafu H z grafu G



Pravidlo 3

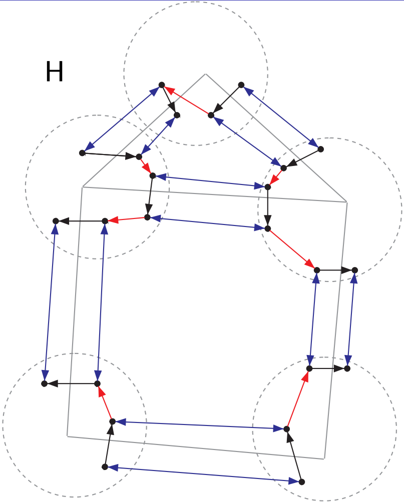
- $((v,E_{v,j},1),(v,E_{v,j+1},0)), v \in V(G), 1 \leq j < \deg(v)$

Konstrukce grafu H z grafu G



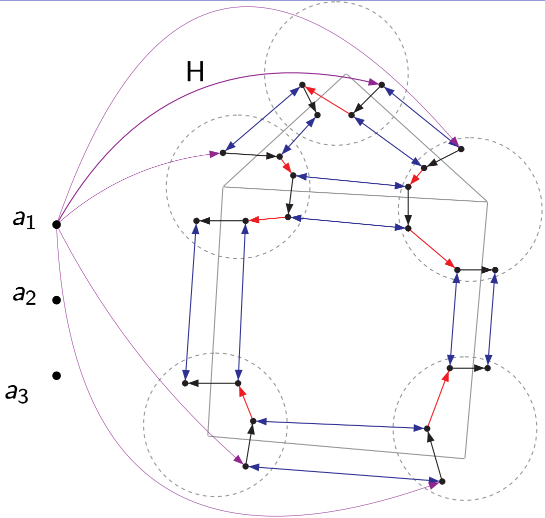
- Byla dokončena pravidla nezávislá na čísle k.

Konstrukce grafu H z grafu G



- Nyní se přidá n-k vrcholů.

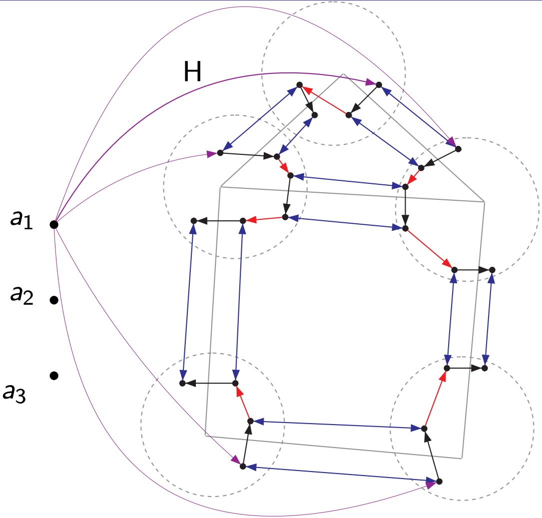
Konstrukce grafu H z grafu G



Pravidlo 4

- Pro přehlednost bude čtvrté pravidlo použito jen na vrchol a_1.

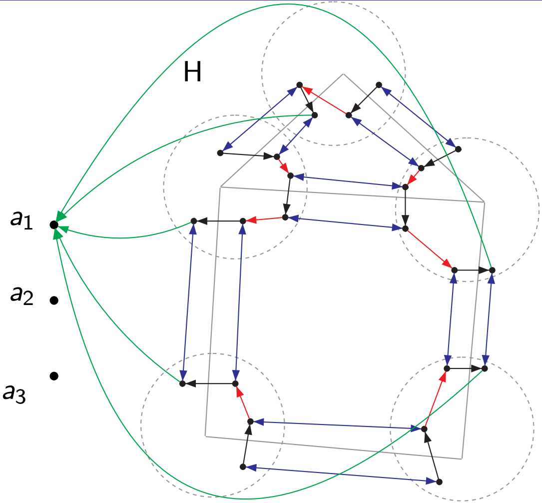
Konstrukce grafu H z grafu G



Pravidlo 4

- $(a_p,(v,E_{v,1},0)), v \in V(G), 1 \leq p \leq n\text{-}k$

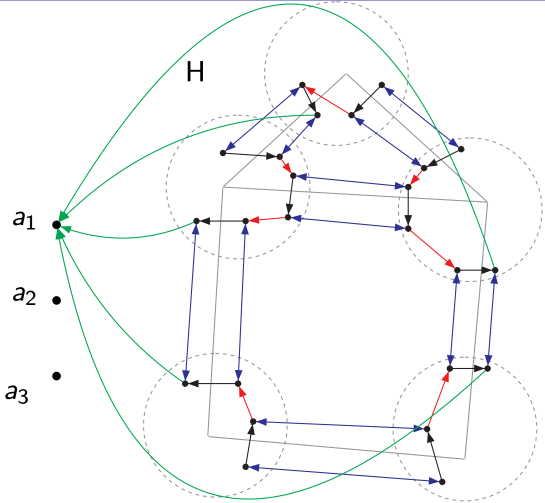
Konstrukce grafu H z grafu G



Pravidlo 5

- Pro přehlednost bude páté pravidlo použito jen na vrchol a_1.

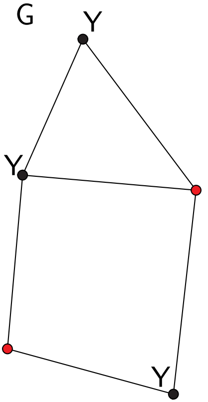
Konstrukce grafu H z grafu G



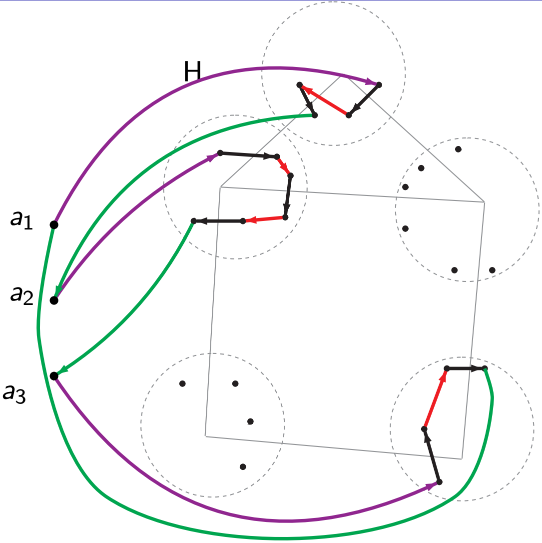
Pravidlo 5

- $((v, E_{v,d}, 1), a_p), v \in V(G), 1 \leq p \leq n\text{-}k,\ d = \deg(v)$

Nalezení HC v grafu H

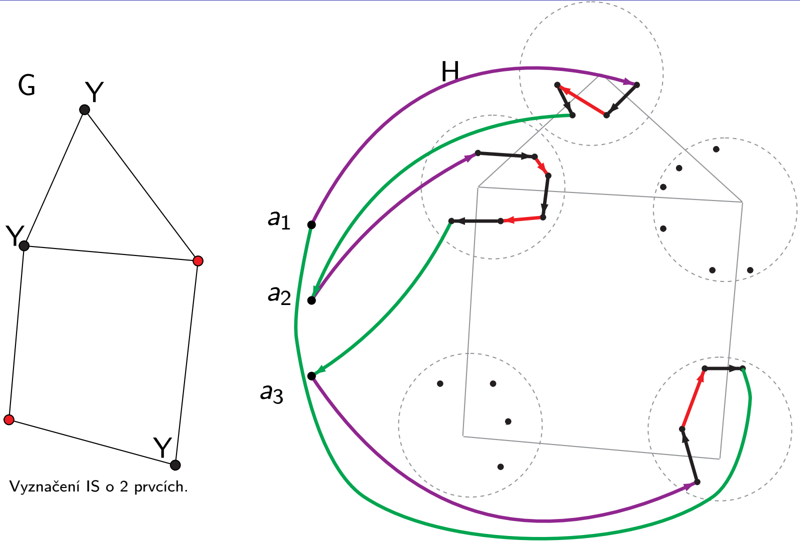


Vyznačení IS o 2 prvcích.



- V grafu vytvoříme cestu začínající ve vrcholu a_1. Z vrcholu a_p se lze dostat do kteréhokoliv vstupního vrcholu každého podgrafu množiny Y (vrcholy grafu, které nepatří do nezávislé množiny).

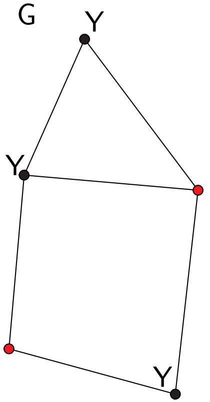
Nalezení HC v grafu H



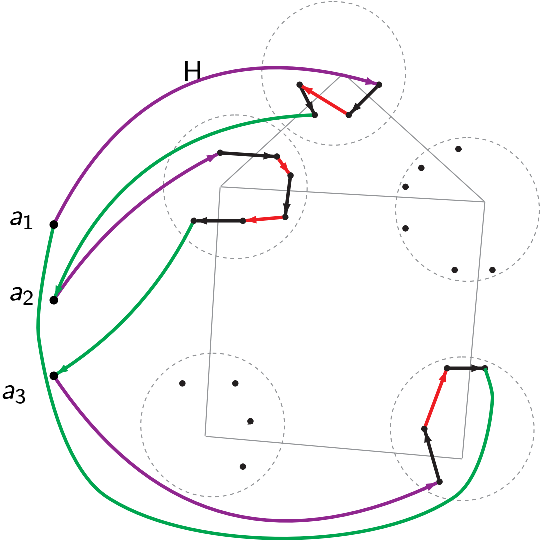
Vyznačení IS o 2 prvcích.

- Přejdeme do libovolného vrcholu a dostaneme se do podgrafu patřícího do Y. Jím projdeme nejkratším možným způsobem až k výstupnímu vrcholu podgrafu.

Nalezení HC v grafu H

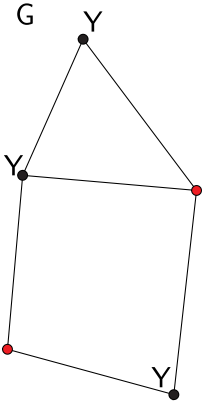


Vyznačení IS o 2 prvcích.

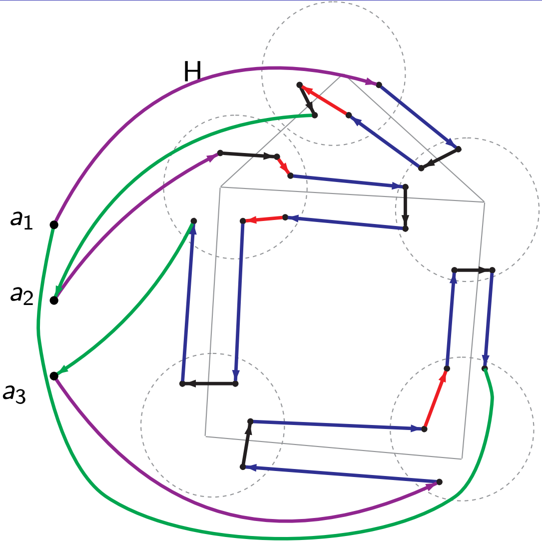


- Takto lze projít všechny vrcholy v podgrafu z množiny Y a nakonec se vrátit do a_1 a vytvořit cyklus.

Nalezení HC v grafu H

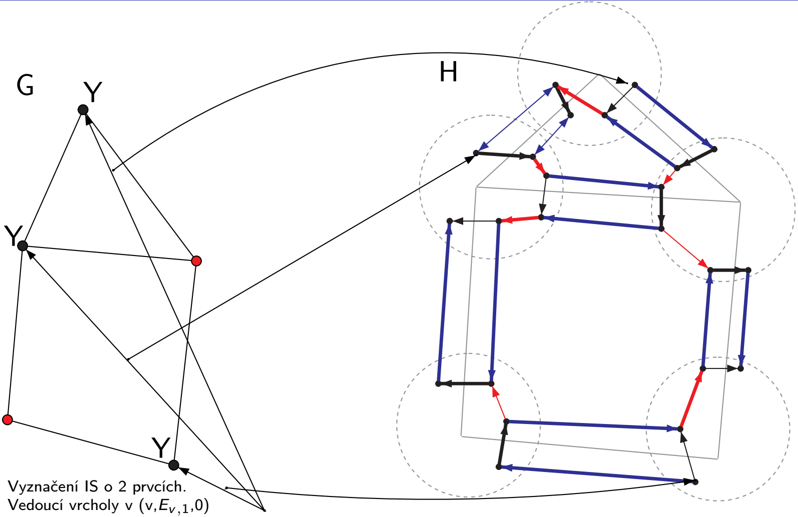


Vyznačení IS o 2 prvcích.



- Pokud začleníme do vytvořené cesty zbylé vrcholy, vytvoříme tím postupně hamiltonovský cyklus v grafu H.

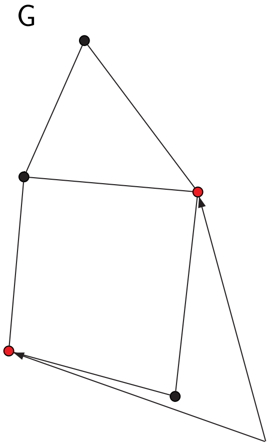
Nalezení IS v grafu G



Vyznačení IS o 2 prvcích.
Vedoucí vrcholy v (v,$E_{v,1}$,0)

- Vytržením vrcholů $a_1,\ldots,a_{n-k}$, dostaneme n-k orientovaných cest. V každé z těchto cest je vždy na začátku vrchol tvaru (v,$E_{v,1}$,0). Tento vrchol v se nazývá vedoucí vrchol.

Nalezení IS v grafu G



- Určujících vrcholů je $n - k$ a jelikož je uvažovaný cyklus hamiltonovský, musí mít každá hrana původního grafu G alespoň jeden vrchol určující. Množina vrcholů, které nejsou určující, tedy vytváří nezávislou množinu o k prvcích grafu G.