Problém obchodního cestujícího (TSP)

Problém obchodního cestujícího (TSP)

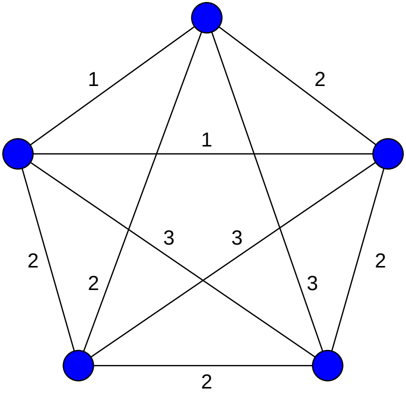
Vstup: Množina n měst a vzdálenosti mezi nimi.

Výstup: Nejkratší okružní cesta procházející všemi městy.

Poznámka: Slovem „okružní" myslíme, že cesta končí ve stejném městě, kde začíná.

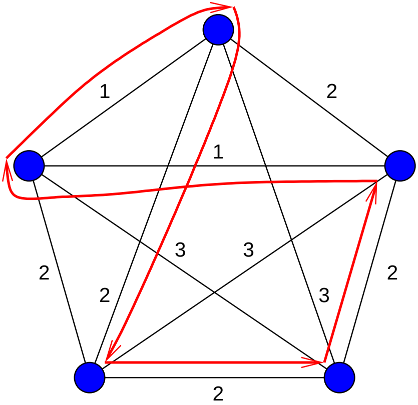
Problém obchodního cestujícího (TSP)

Příklad instance problému:



Problém obchodního cestujícího (TSP)

Příklad instance problému:



Nejkratší okružní cesta má délku 8.

Problém obchodního cestujícího (TSP)

Můžeme uvažovat dvě různé varianty tohoto problému:

- Každé město musí být navštíveno právě jednou.
- Města je možné navštěvovat opakovaně.

Problém obchodního cestujícího (TSP)

V následujícím výkladu se nám bude hodit poněkud formálnější definice problému:

Na instanci problému (tj. množinu měst a vzdálenosti mezi nimi) se můžeme dívat jako na úplný neorientovaný graf $G = (V, E)$ s ohodnocením hran d (kde $d : E \to \mathbb{N}$).

Pro libovolnou množinu hran $E' \subseteq E$ definujeme

$$d(E') = \sum_{e \in E'} d(e)$$

Pro libovolný cyklus C pak definujeme $d(C) = d(E')$, kde E' je množina hran ležících na cyklu C.

Problém obchodního cestujícího (TSP)

Problém TSP pak můžeme formulovat následovně:

Problém obchodního cestujícího (TSP)

Vstup: Úplný neorientovaný graf $G = (V, E)$ s ohodnocením hran d.

Výstup: Cyklus C procházející všemi vrcholy grafu G takový, že hodnota $d(C)$ je minimální možná.

Problém obchodního cestujícího (TSP)

Následující problém je NP-úplný (ať už je či není povoleno navštěvovat vrcholy opakovaně):

Problém obchodního cestujícího (TSP) – rozhodovací varianta

Vstup: Úplný neorientovaný graf $G = (V, E)$ s ohodnocením hran d a číslo L.

Otázka: Existuje v grafu G cyklus C procházející všemi vrcholy takový, že $d(C) \leq L$?

Poznámka: Nemůžeme tedy očekávat, že by problém TSP (ať už v té či oné variantě) byl řešitelný v polynomiálním čase, leda že by platilo PTIME = NPTIME.

Problém obchodního cestujícího (TSP)

Pro problém TSP, kde vyžadujeme aby byl každý vrchol navštíven právě jednou, se dá dokázat následující:

Tvrzení

Pokud PTIME $\neq$ NPTIME, pak pro problém TSP neexistuje k-aproximační algoritmus pro žádné k.

Problém obchodního cestujícího (TSP)

Pro problém TSP, kde vyžadujeme aby byl každý vrchol navštíven právě jednou, se dá dokázat následující:

Tvrzení

Pokud PTIME $\neq$ NPTIME, pak pro problém TSP neexistuje k-aproximační algoritmus pro žádné k.

Důkaz (náznak): Ukáže se, jak bychom pomocí polynomiálního k-aproximačního algoritmu pro TSP vytvořili polynomiální algoritmus řešící problém HK (problém hamiltonovské kružnice), o kterém je známo, že je NP-úplný.

(Konstrukce je podobná jako konstrukce v důkazu NP-obtížnosti problému TSP převodem z problému HK.)

Problém obchodního cestujícího (TSP)

Není těžké si rozmyslet, že varianta TSP kde je povoleno opakovaně navštěvovat vrcholy se dá snadno převést na variantu, kde musí být každý vrchol navštíven právě jednou:

- Pro daný graf G s ohodnocením d sestrojíme nové ohodnocení d', kde $d'(u, v)$ je délka nejkratší cesty z u do v

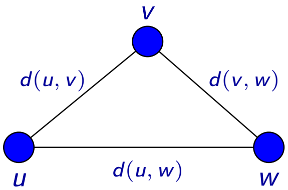
Poznámka: Pro nalezení nejkratších cest mezi dvojicemi vrcholů existují rychlé polynomiální algoritmy (např. Dijkstrův, Floydův-Warshallův apod.)

Graf s ohodnocením d' navíc splňuje tzv. **trojúhelníkovou nerovnost**.

Problém obchodního cestujícího (TSP)

V grafu G s ohodnocením d je splněna **trojúhelníková nerovnost**, jestliže pro libovolnou trojici jeho vrcholů u, v, w platí

$$d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$$



Tj. nejkratší cesta z u do w je vždy po hraně (u, w) a nemá cenu jít „oklikou“ přes nějaký jiný vrchol.

Problém obchodního cestujícího (TSP)

Variantu TSP, ve které se omezujeme pouze na instance, ve kterých je splněna trojúhelníková nerovnost (a kde musí být každý vrchol navštíven právě jednou), označujeme **Δ-TSP**.

Problém obchodního cestujícího (TSP)

Variantu TSP, ve které se omezujeme pouze na instance, ve kterých je splněna trojúhelníková nerovnost (a kde musí být každý vrchol navštíven právě jednou), označujeme **Δ-TSP**.

Pro problém Δ-TSP je znám $3/2$-aproximační polynomiální algoritmus, tj. algoritmus, který pro daný graf G s ohodnocením d vrátí cyklus C procházející všemi vrcholy takový, že

$$d(C) \leq \frac{3}{2} d(C^*)$$

kde C^* optimální řešení (tj. cyklus s minimální hodnotou $d(C^*)$).

Problém obchodního cestujícího (TSP)

Variantu TSP, ve které se omezujeme pouze na instance, ve kterých je splněna trojúhelníková nerovnost (a kde musí být každý vrchol navštíven právě jednou), označujeme **Δ-TSP**.

Pro problém Δ-TSP je znám $3/2$-aproximační polynomiální algoritmus, tj. algoritmus, který pro daný graf G s ohodnocením d vrátí cyklus C procházející všemi vrcholy takový, že

$$d(C) \leq \frac{3}{2} d(C^*)$$

kde C^* optimální řešení (tj. cyklus s minimální hodnotou $d(C^*)$).

My si ukážeme poněkud jednodušší 2-aproximační polynomiální algoritmus pro problém Δ-TSP.

Před vlastním popisem algoritmu si připomeňme některé pojmy:

Kostra grafu $G = (V, E)$ je libovolný souvislý acyklický graf $T = (V', E')$, kde $V = V'$ a $E' \subseteq E$ (tj. T je souvislý podgraf grafu G obsahující všechny vrcholy z G).

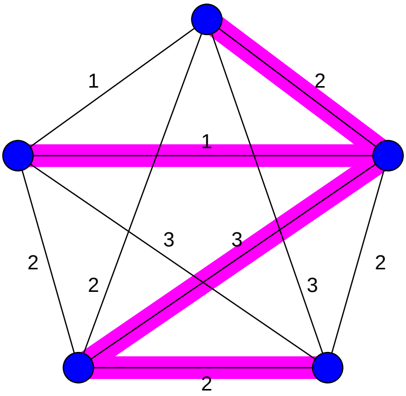
Hodnotu $d(T)$ definujeme jako součet hodnot hran v této kostře, tj. $d(T) = d(E')$.

Kostra T je **minimální**, jestliže pro libovolnou jinou kostru T' v grafu G platí $d(T) \leq d(T')$.

Pro problém nalezení minimální kostry v daném ohodnoceném grafu jsou známy rychlé polynomiální algoritmy (např. Kruskalův nebo Jarníkův (Primův)).

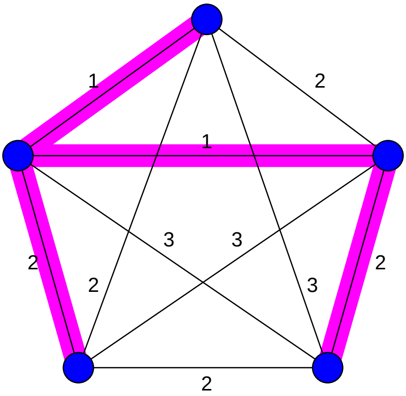
Problém obchodního cestujícího (TSP)

Příklad kostry T, kde $d(T) = 8$:



Problém obchodního cestujícího (TSP)

Příklad minimální kostry T, kde $d(T) = 6$:



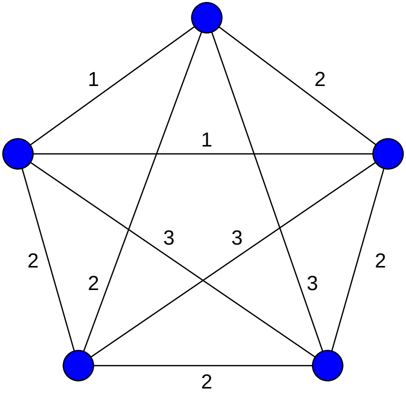
Problém obchodního cestujícího (TSP)

2-aproximační algoritmus pro Δ-TSP pracuje v následujících krocích:

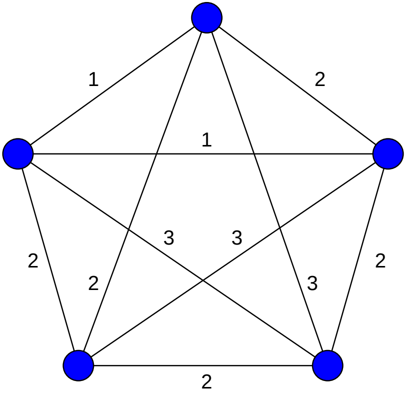
- Najde minimální kostru grafu G.
- Vytvoří uzavřený tah podél této kostry.
- Z vytvořeného tahu odstraní opakující se vrcholy a výsledný cyklus vrátí jako výsledek.

Problém obchodního cestujícího (TSP)

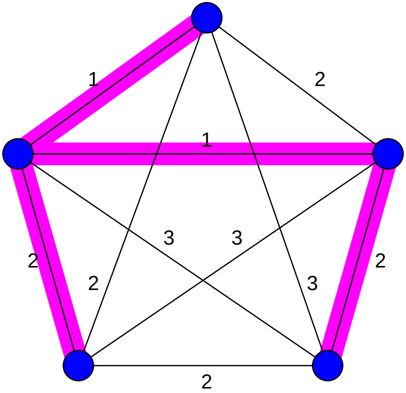
Vezměme si následující instanci Δ-TSP.



Krok 1: Nalezení minimální kostry T



Krok 1: Nalezení minimální kostry T



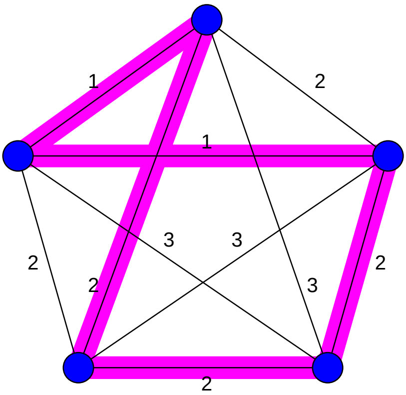
Problém obchodního cestujícího (TSP)

Všimněme si, že $d(T) < d(C^*)$:

- Pokud z C^* odstraníme libovolnou hranu, dostaneme kostru T'.
  Zjevně platí $d(T') < d(C^*)$.
- Pro libovolnou kostru T' platí $d(T) \leq d(T')$.

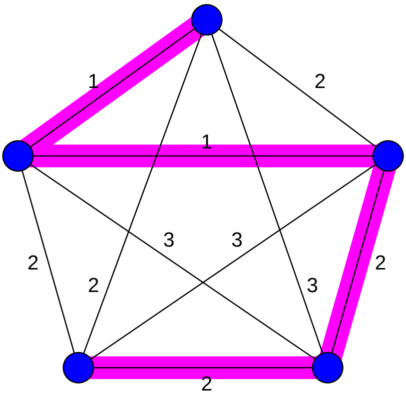
Problém obchodního cestujícího (TSP)

Příklad: Vezměme si optimální cyklus

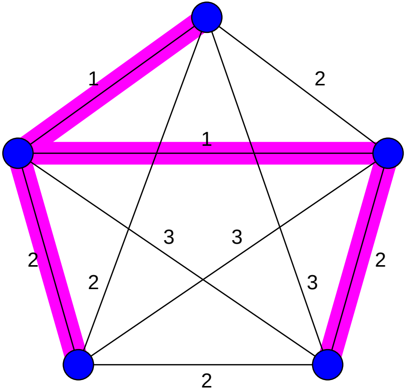


Problém obchodního cestujícího (TSP)

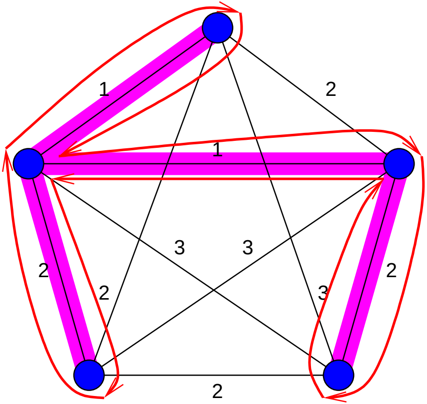
Příklad: Odstraněním jedné hrany vznikne kostra



Krok 1: Nalezení minimální kostry

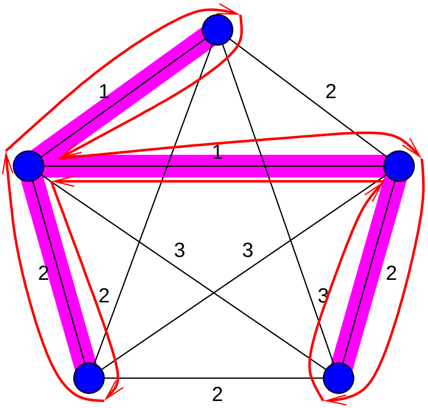


Krok 2: Vytvoření tahu C podél kostry



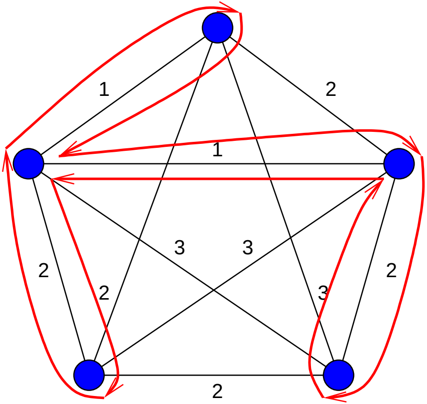
Problém obchodního cestujícího (TSP)

Krok 2: Vytvoření tahu C podél kostry



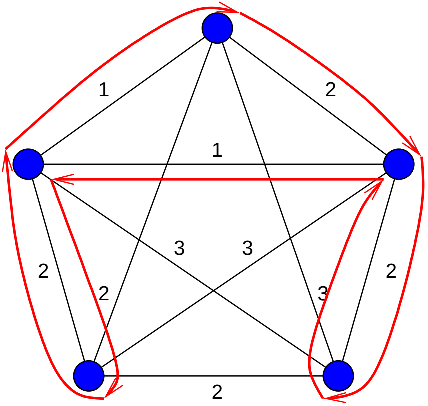
Každou hranu procházíme dvakrát, platí tedy
$d(C) = 2d(T) < 2d(C^*)$.

Krok 2: Vytvoření tahu C podél kostry



Problém obchodního cestujícího (TSP)

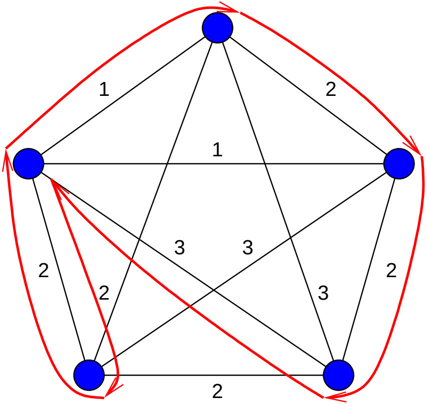
Krok 3: Postupné vypouštění opakujících se vrcholů z tahu C



Každé vypuštění vrcholu tah leda zkrátí.

Problém obchodního cestujícího (TSP)

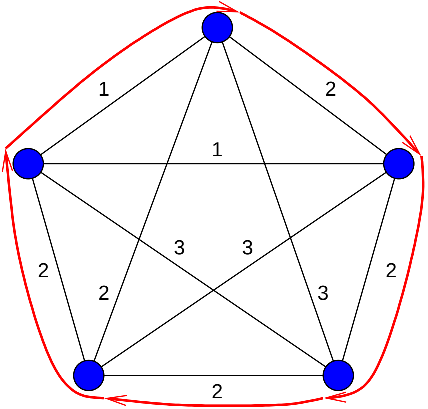
Krok 3: Postupné vypouštění opakujících se vrcholů z tahu C



Každé vypuštění vrcholu tah leda zkrátí.

Problém obchodního cestujícího (TSP)

Krok 3: Postupné vypouštění opakujících se vrcholů z tahu C



Každé vypuštění vrcholu tah leda zkrátí.

Nalezený cyklus: