2. přednáška LS 2006/2007

(Technická poznámka:
- slidy (pdf-soubor) k pondělní přednášce plánuji dávat na web zpravidla do předešlého pátku odpoledne; pokud slidy po přednášce upravím, dodám na web i tu upravenou verzi (upozorňuji na dosavadní problém s čtením v Acrobatu 8.0)
- pdf-soubor ke středečnímu cvičení bude na webu k dispozici zpravidla předešlé úterý dopoledne.)

- připomeneme rozhovory Á-čka a B-čka z 1. přednášky (fiktivní osoby pro oživení ...)
- přidáme diskuse o kvocientech jazyků, dosažitelných stavech, minimalizaci automatů, nedeterministických automatech, ...

Připomeňme si, že Á-čko na začátku pro hledání všech výskytů *abaaba* (v souboru obsahujícím pouze znaky a, b) vlastně sestrojil konečný automat $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ rozpoznávající jazyk
$L_0 = \{ u \in \{a, b\}^* \mid u \text{ má sufix } abaaba \}$. (Proč ?)
V jeho (pascalském) programu byl onen automat zadán (tabulkou) takto:

```
const length = 6
type state = 0 .. length
type alphabet = (a,b)
const A: array [ state , alphabet ] of state
   = [ [1,0], [1,2], [3,0], [4,2], [1,5], [6,0], [4,2] ]
```

Pro sebe měl Á-čko zakreslený graf ...

Operace kvocientu

Při vysvětlování postupu Á-čko užíval slovo kvocient. B-čko si dodatečně našel definici a zjistil, že levý kvocient jazyka L_1 podle L_2 je definován takto:

$$L_2 \backslash L_1 = \{ v \mid \exists u \in L_2 : uv \in L_1 \}.$$

To vypadalo nějak složitě, ale B-čko to nakonec sám 'prorazil'. Věděl, že když si neví rady, musí začít nějakým jednoduchým případem; nejprve si na konkrétních příkladech (konečných jazyků) promyslel případ, kdy L_2 obsahuje jediné slovo, tedy případ $\{w\}\backslash L_1$, také označovaný $w\backslash L_1$.
Pak už to byla celkem hračka; pomohlo mu, když si uvědomil, že

$$L_2 \backslash L_1 = \bigcup_{w \in L_2} w \backslash L_1$$

Ale vraťme se k metodě návrhu konečných automatů, při níž Á-čko de facto jakési (jednoduché) kvocienty používal.

Pro $L_0 = \{ u \in \{a,b\}^* \mid u$ má sufix $abaaba \}$ Á-čko vlastně konstruoval (popisoval) kvocienty
$\{\varepsilon\} \backslash L_0$
$\{a\} \backslash L_0$
$\{b\} \backslash L_0$
$\{aa\} \backslash L_0$
$\{ab\} \backslash L_0$
$\{ba\} \backslash L_0$
$\{bb\} \backslash L_0$
$\{aaa\} \backslash L_0$
...
Využíval ovšem toho, že $uv \backslash L = v \backslash (u \backslash L)$ (všimněme si obráceného pořadí !), takže např. pro popis $ab \backslash L_0$ využíval již dříve zjištěného $a \backslash L_0$, který si označil L_1 (tedy $ab \backslash L_0 = b \backslash L_1$), atd.
Taky dával pozor, ať zbytečně nově neoznačuje již označené jazyky. Když tedy např. zjistil, že $b \backslash L_0 = L_0$, nové označení (tj. nový index, neboli nový stav) nepotřeboval, ...

Ukázalo se, že si vystačil s 6 jazyky

$L_0 = \{ u \in \{a, b\}^* \mid u \text{ má sufix } abaaba \}$

$L_1 = \{baaba\} \cup \{ u \in \{a, b\}^* \mid u \text{ má sufix } abaaba \}$

$L_2 = \{aaba\} \cup \{ u \in \{a, b\}^* \mid u \text{ má sufix } abaaba \}$

$L_3 = \{aba, baaba\} \cup \{ u \in \{a, b\}^* \mid u \text{ má sufix } abaaba \}$

$L_4 = \{ba, baaba\} \cup \{ u \in \{a, b\}^* \mid u \text{ má sufix } abaaba \}$

$L_5 = \{a, aaba\} \cup \{ u \in \{a, b\}^* \mid u \text{ má sufix } abaaba \}$

$L_6 = \{\varepsilon, aba, baaba\} \cup \{ u \in \{a, b\}^* \mid u \text{ má sufix } abaaba \}$

Ty jazyky odpovídaly stavům zkonstruovaného automatu.
Všimněme si, že podobně v obecném automatu $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ odpovídá každému stavu q jazyk

$$L_q^{out-to-F} = \{ u \mid \delta^*(q, u) \in F \} \text{ (v jiném značení } \{ u \mid q \xrightarrow{u} F \}\text{)}$$

B-čko pak stejný postup provedl pro jazyk

$$L_0 = \{\, u \in \{0,1\}^* \mid bn(u) \mod 3 = 0 \text{ a } u \text{ neobsahuje podslovo } 101 \,\}$$

Zde tedy konstruoval (popisoval) kvocienty $\{\varepsilon\}\backslash L_0$, $\{0\}\backslash L_0$, $\{1\}\backslash L_0$, $\{00\}\backslash L_0$, $\{01\}\backslash L_0$, $\{10\}\backslash L_0$, $\{11\}\backslash L_0$, $\{000\}\backslash L_0$, ...

Např. pro

$L_2 = \{\, u \mid (2 \cdot 2^{|u|} + bn(u)) \mod 3 = 0$
$\quad \text{a } u \text{ neobsahuje podslovo } 101 \text{ a } u \text{ nezačíná } 1 \,\}$

odvozoval

$$\begin{aligned}
\{0\}\backslash L_2 &= \{\, u \mid 0u \in L_2 \,\}\\
&= \{\, u \mid (2 \cdot 2^{|0u|} + bn(0u)) \mod 3 = 0\\
&\qquad \text{a } 0u \text{ neobsahuje podslovo } 101 \text{ a } 0u \text{ nezačíná } 1 \,\}\\
&= \{\, u \mid (2 \cdot 2 \cdot 2^{|u|} + bn(u)) \mod 3 = 0\\
&\qquad \text{a } u \text{ neobsahuje podslovo } 101 \,\}\\
&= \{\, u \mid (3 \cdot 2^{|u|} + 1 \cdot 2^{|u|} + bn(u)) \mod 3 = 0\\
&\qquad \text{a } u \text{ neobsahuje podslovo } 101 \,\}\\
&= \{\, u \mid (2^{|u|} + bn(u)) \mod 3 = 0\\
&\qquad \text{a } u \text{ neobsahuje podslovo } 101 \,\} = L_4
\end{aligned}$$

Na základě této zkušenosti B-čko vyslovil domněnku, že k danému jazyku $L \subseteq \Sigma^*$ existuje konečný automat A takový, že $L(A) = L$, právě tehdy, když množina

$\{w \backslash L \mid w \in \Sigma^*\}$

je konečná. Á-čko potvrdil správnost této domněnky a dohodli se, že se na to později podívají ještě podrobněji.

Teď se B-čko ještě chtěl vrátit k metodě minimalizace automatu, kterou Á-čko dříve zmínil.

Připomeňme si, že A a B spolu navrhli automaty A_1, A_2, kde

$$L(A_1) = \{ u \in \{0,1\}^* \mid bn(u) \mod 3 = 0 \}$$

$$L(A_2) = \{ u \in \{0,1\}^* \mid u \text{ neobsahuje podslovo } 101 \}$$

Příslušné tabulky vypadaly takto:

A_1	0	1
$\leftrightarrow q_1$	q_1	q_2
q_2	q_3	q_1
q_3	q_2	q_3

A_2	0	1
$\leftrightarrow r_1$	r_1	r_2
$\leftarrow r_2$	r_3	r_2
$\leftarrow r_3$	r_1	r_4
r_4	r_4	r_4

Podle (stručně matematicky popsaného) návodu Á-čka vytvořili (kombinovaný) automat A pro jazyk $L(A_1) \cap L(A_2)$ takto:

A_1	0	1
$\leftrightarrow q_1$	q_1	q_2
q_2	q_3	q_1
q_3	q_2	q_3

A_2	0	1
$\leftrightarrow r_1$	r_1	r_2
$\leftarrow r_2$	r_3	r_2
$\leftarrow r_3$	r_1	r_4
r_4	r_4	r_4

A	0	1
$\leftrightarrow(q_1, r_1)$	(q_1, r_1)	(q_2, r_2)
$\leftarrow(q_1, r_2)$	(q_1, r_3)	(q_2, r_2)
$\leftarrow(q_1, r_3)$	(q_1, r_1)	(q_2, r_4)
(q_1, r_4)	(q_1, r_4)	(q_2, r_4)
(q_2, r_1)	(q_3, r_1)	(q_1, r_2)
(q_2, r_2)	(q_3, r_3)	(q_1, r_2)
(q_2, r_3)	(q_3, r_1)	(q_1, r_4)
(q_2, r_4)	(q_3, r_4)	(q_1, r_4)
(q_3, r_1)	(q_2, r_1)	(q_3, r_2)
(q_3, r_2)	(q_2, r_3)	(q_3, r_2)
(q_3, r_3)	(q_2, r_1)	(q_3, r_4)
(q_3, r_4)	(q_2, r_4)	(q_3, r_4)

B-čko přišel s nápadem zjednodušit značení stavů automatu A, ať se v tom lépe vyznají při následném postupu minimalizace.
Á-čko pochopitelně souhlasí a navrhuje přitom předvést převod do tzv. normovaného tvaru; prý se to bude hodit. Standardně se prý přitom stavy označují $1, 2, 3, \ldots$, ale on teď použije raději symboly $s_1, s_2, s_3, \ldots$.

Navrhovaný postup má z dřívějška zapsán na kusu papíru; začíná takto:
- Na začátku jsou všechny stavy 'neoznačené' a 'nezpracované'.
- Počáteční stav označím symbolem (přejmenuji na) s_1.
- Dokud nejsou všechny označené stavy zpracované, opakuji tuto činnost:

  vezmu označený nezpracovaný stav s_i s nejnižším indexem i

  ......

Dál je to nečitelné, ale B-čko bez problémů pochopí postup z konkrétní aplikace na automat A a návod pak doplní. (Jak?)

A	0	1
$\leftrightarrow(q_1, r_1)$	(q_1, r_1)	(q_2, r_2)
$\leftarrow(q_1, r_2)$	(q_1, r_3)	(q_2, r_2)
$\leftarrow(q_1, r_3)$	(q_1, r_1)	(q_2, r_4)
(q_1, r_4)	(q_1, r_4)	(q_2, r_4)
(q_2, r_1)	(q_3, r_1)	(q_1, r_2)
(q_2, r_2)	(q_3, r_3)	(q_1, r_2)
(q_2, r_3)	(q_3, r_1)	(q_1, r_4)
(q_2, r_4)	(q_3, r_4)	(q_1, r_4)
(q_3, r_1)	(q_2, r_1)	(q_3, r_2)
(q_3, r_2)	(q_2, r_3)	(q_3, r_2)
(q_3, r_3)	(q_2, r_1)	(q_3, r_4)
(q_3, r_4)	(q_2, r_4)	(q_3, r_4)

A'	0	1
$\leftrightarrow s_1 = (q_1, r_1)$		

A	0	1
$\leftrightarrow(q_1, r_1)$	(q_1, r_1)	(q_2, r_2)
$\leftarrow(q_1, r_2)$	(q_1, r_3)	(q_2, r_2)
$\leftarrow(q_1, r_3)$	(q_1, r_1)	(q_2, r_4)
(q_1, r_4)	(q_1, r_4)	(q_2, r_4)
(q_2, r_1)	(q_3, r_1)	(q_1, r_2)
(q_2, r_2)	(q_3, r_3)	(q_1, r_2)
(q_2, r_3)	(q_3, r_1)	(q_1, r_4)
(q_2, r_4)	(q_3, r_4)	(q_1, r_4)
(q_3, r_1)	(q_2, r_1)	(q_3, r_2)
(q_3, r_2)	(q_2, r_3)	(q_3, r_2)
(q_3, r_3)	(q_2, r_1)	(q_3, r_4)
(q_3, r_4)	(q_2, r_4)	(q_3, r_4)

A'	0	1
$\leftrightarrow s_1 = (q_1, r_1)$	s_1	s_2
$s_2 = (q_2, r_2)$		

A	0	1
$\leftrightarrow(q_1,r_1)$	(q_1,r_1)	(q_2,r_2)
$\leftarrow(q_1,r_2)$	(q_1,r_3)	(q_2,r_2)
$\leftarrow(q_1,r_3)$	(q_1,r_1)	(q_2,r_4)
(q_1,r_4)	(q_1,r_4)	(q_2,r_4)
(q_2,r_1)	(q_3,r_1)	(q_1,r_2)
(q_2,r_2)	(q_3,r_3)	(q_1,r_2)
(q_2,r_3)	(q_3,r_1)	(q_1,r_4)
(q_2,r_4)	(q_3,r_4)	(q_1,r_4)
(q_3,r_1)	(q_2,r_1)	(q_3,r_2)
(q_3,r_2)	(q_2,r_3)	(q_3,r_2)
(q_3,r_3)	(q_2,r_1)	(q_3,r_4)
(q_3,r_4)	(q_2,r_4)	(q_3,r_4)

A'	0	1
$\leftrightarrow s_1 = (q_1,r_1)$	s_1	s_2
$s_2 = (q_2,r_2)$	s_3	s_4
$s_3 = (q_3,r_3)$		
$\leftarrow s_4 = (q_1,r_2)$		

A	0	1
$\leftrightarrow(q_1,r_1)$	(q_1,r_1)	(q_2,r_2)
$\leftarrow(q_1,r_2)$	(q_1,r_3)	(q_2,r_2)
$\leftarrow(q_1,r_3)$	(q_1,r_1)	(q_2,r_4)
(q_1,r_4)	(q_1,r_4)	(q_2,r_4)
(q_2,r_1)	(q_3,r_1)	(q_1,r_2)
(q_2,r_2)	(q_3,r_3)	(q_1,r_2)
(q_2,r_3)	(q_3,r_1)	(q_1,r_4)
(q_2,r_4)	(q_3,r_4)	(q_1,r_4)
(q_3,r_1)	(q_2,r_1)	(q_3,r_2)
(q_3,r_2)	(q_2,r_3)	(q_3,r_2)
(q_3,r_3)	(q_2,r_1)	(q_3,r_4)
(q_3,r_4)	(q_2,r_4)	(q_3,r_4)

A'	0	1
$\leftrightarrow s_1 = (q_1,r_1)$	s_1	s_2
$s_2 = (q_2,r_2)$	s_3	s_4
$s_3 = (q_3,r_3)$	s_5	s_6
$\leftarrow s_4 = (q_1,r_2)$		
$s_5 = (q_2,r_1)$		
$s_6 = (q_3,r_4)$		

A	0	1
$\leftrightarrow(q_1, r_1)$	(q_1, r_1)	(q_2, r_2)
$\leftarrow(q_1, r_2)$	(q_1, r_3)	(q_2, r_2)
$\leftarrow(q_1, r_3)$	(q_1, r_1)	(q_2, r_4)
(q_1, r_4)	(q_1, r_4)	(q_2, r_4)
(q_2, r_1)	(q_3, r_1)	(q_1, r_2)
(q_2, r_2)	(q_3, r_3)	(q_1, r_2)
(q_2, r_3)	(q_3, r_1)	(q_1, r_4)
(q_2, r_4)	(q_3, r_4)	(q_1, r_4)
(q_3, r_1)	(q_2, r_1)	(q_3, r_2)
(q_3, r_2)	(q_2, r_3)	(q_3, r_2)
(q_3, r_3)	(q_2, r_1)	(q_3, r_4)
(q_3, r_4)	(q_2, r_4)	(q_3, r_4)

A'	0	1
$\leftrightarrow s_1 = (q_1, r_1)$	s_1	s_2
$s_2 = (q_2, r_2)$	s_3	s_4
$s_3 = (q_3, r_3)$	s_5	s_6
$\leftarrow s_4 = (q_1, r_2)$	s_7	s_2
$s_5 = (q_2, r_1)$		
$s_6 = (q_3, r_4)$		
$\leftarrow s_7 = (q_1, r_3)$		

A	0	1
$\leftrightarrow(q_1, r_1)$	(q_1, r_1)	(q_2, r_2)
$\leftarrow(q_1, r_2)$	(q_1, r_3)	(q_2, r_2)
$\leftarrow(q_1, r_3)$	(q_1, r_1)	(q_2, r_4)
(q_1, r_4)	(q_1, r_4)	(q_2, r_4)
(q_2, r_1)	(q_3, r_1)	(q_1, r_2)
(q_2, r_2)	(q_3, r_3)	(q_1, r_2)
(q_2, r_3)	(q_3, r_1)	(q_1, r_4)
(q_2, r_4)	(q_3, r_4)	(q_1, r_4)
(q_3, r_1)	(q_2, r_1)	(q_3, r_2)
(q_3, r_2)	(q_2, r_3)	(q_3, r_2)
(q_3, r_3)	(q_2, r_1)	(q_3, r_4)
(q_3, r_4)	(q_2, r_4)	(q_3, r_4)

A'	0	1
$\leftrightarrow s_1 = (q_1, r_1)$	s_1	s_2
$s_2 = (q_2, r_2)$	s_3	s_4
$s_3 = (q_3, r_3)$	s_5	s_6
$\leftarrow s_4 = (q_1, r_2)$	s_7	s_2
$s_5 = (q_2, r_1)$	s_8	s_4
$s_6 = (q_3, r_4)$		
$\leftarrow s_7 = (q_1, r_3)$		
$s_8 = (q_3, r_1)$		

A	0	1
$\leftrightarrow(q_1,r_1)$	(q_1,r_1)	(q_2,r_2)
$\leftarrow(q_1,r_2)$	(q_1,r_3)	(q_2,r_2)
$\leftarrow(q_1,r_3)$	(q_1,r_1)	(q_2,r_4)
(q_1,r_4)	(q_1,r_4)	(q_2,r_4)
(q_2,r_1)	(q_3,r_1)	(q_1,r_2)
(q_2,r_2)	(q_3,r_3)	(q_1,r_2)
(q_2,r_3)	(q_3,r_1)	(q_1,r_4)
(q_2,r_4)	(q_3,r_4)	(q_1,r_4)
(q_3,r_1)	(q_2,r_1)	(q_3,r_2)
(q_3,r_2)	(q_2,r_3)	(q_3,r_2)
(q_3,r_3)	(q_2,r_1)	(q_3,r_4)
(q_3,r_4)	(q_2,r_4)	(q_3,r_4)

A'	0	1
$\leftrightarrow s_1 = (q_1,r_1)$	s_1	s_2
$s_2 = (q_2,r_2)$	s_3	s_4
$s_3 = (q_3,r_3)$	s_5	s_6
$\leftarrow s_4 = (q_1,r_2)$	s_7	s_2
$s_5 = (q_2,r_1)$	s_8	s_4
$s_6 = (q_3,r_4)$	s_9	s_6
$\leftarrow s_7 = (q_1,r_3)$		
$s_8 = (q_3,r_1)$		
$s_9 = (q_2,r_4)$		

A	0	1
$\leftrightarrow(q_1, r_1)$	(q_1, r_1)	(q_2, r_2)
$\leftarrow(q_1, r_2)$	(q_1, r_3)	(q_2, r_2)
$\leftarrow(q_1, r_3)$	(q_1, r_1)	(q_2, r_4)
(q_1, r_4)	(q_1, r_4)	(q_2, r_4)
(q_2, r_1)	(q_3, r_1)	(q_1, r_2)
(q_2, r_2)	(q_3, r_3)	(q_1, r_2)
(q_2, r_3)	(q_3, r_1)	(q_1, r_4)
(q_2, r_4)	(q_3, r_4)	(q_1, r_4)
(q_3, r_1)	(q_2, r_1)	(q_3, r_2)
(q_3, r_2)	(q_2, r_3)	(q_3, r_2)
(q_3, r_3)	(q_2, r_1)	(q_3, r_4)
(q_3, r_4)	(q_2, r_4)	(q_3, r_4)

A'	0	1
$\leftrightarrow s_1 = (q_1, r_1)$	s_1	s_2
$s_2 = (q_2, r_2)$	s_3	s_4
$s_3 = (q_3, r_3)$	s_5	s_6
$\leftarrow s_4 = (q_1, r_2)$	s_7	s_2
$s_5 = (q_2, r_1)$	s_8	s_4
$s_6 = (q_3, r_4)$	s_9	s_6
$\leftarrow s_7 = (q_1, r_3)$	s_1	s_9
$s_8 = (q_3, r_1)$		
$s_9 = (q_2, r_4)$		

A	0	1
$\leftrightarrow(q_1, r_1)$	(q_1, r_1)	(q_2, r_2)
$\leftarrow(q_1, r_2)$	(q_1, r_3)	(q_2, r_2)
$\leftarrow(q_1, r_3)$	(q_1, r_1)	(q_2, r_4)
(q_1, r_4)	(q_1, r_4)	(q_2, r_4)
(q_2, r_1)	(q_3, r_1)	(q_1, r_2)
(q_2, r_2)	(q_3, r_3)	(q_1, r_2)
(q_2, r_3)	(q_3, r_1)	(q_1, r_4)
(q_2, r_4)	(q_3, r_4)	(q_1, r_4)
(q_3, r_1)	(q_2, r_1)	(q_3, r_2)
(q_3, r_2)	(q_2, r_3)	(q_3, r_2)
(q_3, r_3)	(q_2, r_1)	(q_3, r_4)
(q_3, r_4)	(q_2, r_4)	(q_3, r_4)

A'	0	1
$\leftrightarrow s_1 = (q_1, r_1)$	s_1	s_2
$s_2 = (q_2, r_2)$	s_3	s_4
$s_3 = (q_3, r_3)$	s_5	s_6
$\leftarrow s_4 = (q_1, r_2)$	s_7	s_2
$s_5 = (q_2, r_1)$	s_8	s_4
$s_6 = (q_3, r_4)$	s_9	s_6
$\leftarrow s_7 = (q_1, r_3)$	s_1	s_9
$s_8 = (q_3, r_1)$	s_5	s_{10}
$s_9 = (q_2, r_4)$		
$s_{10} = (q_3, r_2)$		

A	0	1
$\leftrightarrow(q_1, r_1)$	(q_1, r_1)	(q_2, r_2)
$\leftarrow(q_1, r_2)$	(q_1, r_3)	(q_2, r_2)
$\leftarrow(q_1, r_3)$	(q_1, r_1)	(q_2, r_4)
(q_1, r_4)	(q_1, r_4)	(q_2, r_4)
(q_2, r_1)	(q_3, r_1)	(q_1, r_2)
(q_2, r_2)	(q_3, r_3)	(q_1, r_2)
(q_2, r_3)	(q_3, r_1)	(q_1, r_4)
(q_2, r_4)	(q_3, r_4)	(q_1, r_4)
(q_3, r_1)	(q_2, r_1)	(q_3, r_2)
(q_3, r_2)	(q_2, r_3)	(q_3, r_2)
(q_3, r_3)	(q_2, r_1)	(q_3, r_4)
(q_3, r_4)	(q_2, r_4)	(q_3, r_4)

A'	0	1
$\leftrightarrow s_1 = (q_1, r_1)$	s_1	s_2
$s_2 = (q_2, r_2)$	s_3	s_4
$s_3 = (q_3, r_3)$	s_5	s_6
$\leftarrow s_4 = (q_1, r_2)$	s_7	s_2
$s_5 = (q_2, r_1)$	s_8	s_4
$s_6 = (q_3, r_4)$	s_9	s_6
$\leftarrow s_7 = (q_1, r_3)$	s_1	s_9
$s_8 = (q_3, r_1)$	s_5	s_{10}
$s_9 = (q_2, r_4)$	s_6	s_{11}
$s_{10} = (q_3, r_2)$		
$s_{11} = (q_1, r_4)$		

A	0	1
$\leftrightarrow(q_1, r_1)$	(q_1, r_1)	(q_2, r_2)
$\leftarrow(q_1, r_2)$	(q_1, r_3)	(q_2, r_2)
$\leftarrow(q_1, r_3)$	(q_1, r_1)	(q_2, r_4)
(q_1, r_4)	(q_1, r_4)	(q_2, r_4)
(q_2, r_1)	(q_3, r_1)	(q_1, r_2)
(q_2, r_2)	(q_3, r_3)	(q_1, r_2)
(q_2, r_3)	(q_3, r_1)	(q_1, r_4)
(q_2, r_4)	(q_3, r_4)	(q_1, r_4)
(q_3, r_1)	(q_2, r_1)	(q_3, r_2)
(q_3, r_2)	(q_2, r_3)	(q_3, r_2)
(q_3, r_3)	(q_2, r_1)	(q_3, r_4)
(q_3, r_4)	(q_2, r_4)	(q_3, r_4)

A'	0	1
$\leftrightarrow s_1 = (q_1, r_1)$	s_1	s_2
$s_2 = (q_2, r_2)$	s_3	s_4
$s_3 = (q_3, r_3)$	s_5	s_6
$\leftarrow s_4 = (q_1, r_2)$	s_7	s_2
$s_5 = (q_2, r_1)$	s_8	s_4
$s_6 = (q_3, r_4)$	s_9	s_6
$\leftarrow s_7 = (q_1, r_3)$	s_1	s_9
$s_8 = (q_3, r_1)$	s_5	s_{10}
$s_9 = (q_2, r_4)$	s_6	s_{11}
$s_{10} = (q_3, r_2)$	s_{12}	s_{10}
$s_{11} = (q_1, r_4)$		
$s_{12} = (q_2, r_3)$		

A	0	1
$\leftrightarrow(q_1, r_1)$	(q_1, r_1)	(q_2, r_2)
$\leftarrow(q_1, r_2)$	(q_1, r_3)	(q_2, r_2)
$\leftarrow(q_1, r_3)$	(q_1, r_1)	(q_2, r_4)
(q_1, r_4)	(q_1, r_4)	(q_2, r_4)
(q_2, r_1)	(q_3, r_1)	(q_1, r_2)
(q_2, r_2)	(q_3, r_3)	(q_1, r_2)
(q_2, r_3)	(q_3, r_1)	(q_1, r_4)
(q_2, r_4)	(q_3, r_4)	(q_1, r_4)
(q_3, r_1)	(q_2, r_1)	(q_3, r_2)
(q_3, r_2)	(q_2, r_3)	(q_3, r_2)
(q_3, r_3)	(q_2, r_1)	(q_3, r_4)
(q_3, r_4)	(q_2, r_4)	(q_3, r_4)

A'	0	1
$\leftrightarrow s_1 = (q_1, r_1)$	s_1	s_2
$s_2 = (q_2, r_2)$	s_3	s_4
$s_3 = (q_3, r_3)$	s_5	s_6
$\leftarrow s_4 = (q_1, r_2)$	s_7	s_2
$s_5 = (q_2, r_1)$	s_8	s_4
$s_6 = (q_3, r_4)$	s_9	s_6
$\leftarrow s_7 = (q_1, r_3)$	s_1	s_9
$s_8 = (q_3, r_1)$	s_5	s_{10}
$s_9 = (q_2, r_4)$	s_6	s_{11}
$s_{10} = (q_3, r_2)$	s_{12}	s_{10}
$s_{11} = (q_1, r_4)$	s_{11}	s_9
$s_{12} = (q_2, r_3)$		

A	0	1
$\leftrightarrow(q_1, r_1)$	(q_1, r_1)	(q_2, r_2)
$\leftarrow(q_1, r_2)$	(q_1, r_3)	(q_2, r_2)
$\leftarrow(q_1, r_3)$	(q_1, r_1)	(q_2, r_4)
(q_1, r_4)	(q_1, r_4)	(q_2, r_4)
(q_2, r_1)	(q_3, r_1)	(q_1, r_2)
(q_2, r_2)	(q_3, r_3)	(q_1, r_2)
(q_2, r_3)	(q_3, r_1)	(q_1, r_4)
(q_2, r_4)	(q_3, r_4)	(q_1, r_4)
(q_3, r_1)	(q_2, r_1)	(q_3, r_2)
(q_3, r_2)	(q_2, r_3)	(q_3, r_2)
(q_3, r_3)	(q_2, r_1)	(q_3, r_4)
(q_3, r_4)	(q_2, r_4)	(q_3, r_4)

A'	0	1
$\leftrightarrow s_1 = (q_1, r_1)$	s_1	s_2
$s_2 = (q_2, r_2)$	s_3	s_4
$s_3 = (q_3, r_3)$	s_5	s_6
$\leftarrow s_4 = (q_1, r_2)$	s_7	s_2
$s_5 = (q_2, r_1)$	s_8	s_4
$s_6 = (q_3, r_4)$	s_9	s_6
$\leftarrow s_7 = (q_1, r_3)$	s_1	s_9
$s_8 = (q_3, r_1)$	s_5	s_{10}
$s_9 = (q_2, r_4)$	s_6	s_{11}
$s_{10} = (q_3, r_2)$	s_{12}	s_{10}
$s_{11} = (q_1, r_4)$	s_{11}	s_9
$s_{12} = (q_2, r_3)$	s_8	s_{11}

A'	0	1
$\leftrightarrow s_1$	s_1	s_2
s_2	s_3	s_4
s_3	s_5	s_6
$\leftarrow s_4$	s_7	s_2
s_5	s_8	s_4
s_6	s_9	s_6
$\leftarrow s_7$	s_1	s_9
s_8	s_5	s_{10}
s_9	s_6	s_{11}
s_{10}	s_{12}	s_{10}
s_{11}	s_{11}	s_9
s_{12}	s_8	s_{11}

Á-čko říká, že teď si stavy rozdělí podle ekvivalence
$s \sim s' \quad \Leftrightarrow_{df} \quad L_s^{out-to-F} = L_{s'}^{out-to-F}$
(Co tím myslí a jak to udělá?)

Připomenutí: relace ekvivalence

Relace ρ na množině M je *ekvivalence* $\Leftrightarrow_{df}$ ρ je:

- reflexivní $(\forall x \in M : x \rho x)$,
- symetrická $(\forall x, y \in M : x \rho y \Rightarrow y \rho x)$,
- tranzitivní $(\forall x, y, z \in M : (x \rho y \ \wedge \ y \rho z) \Longrightarrow x \rho z)$.

Ekvivalence ρ definuje na M *rozklad*

$$\{ [x]_\rho \mid x \in M \}$$

tj. systém vzájemně disjunktních množin, zvaných třídy ekvivalence, jejichž sjednocením je M, kde

$$[x]_\rho = \{ y \mid x \rho y \}.$$

konstruuje rozklady podle ekvivalencí

$\sim_0, \sim_1, \sim_2, \dots$

Nakonec tzv. podílový automat (faktor-automat)
$A_\sim = \dots$

K A definujme tzv. podílový automat podle ekvivalence $\sim$, označený $A_\sim$, takto (píšeme stručněji $[q]$ místo $[q]_\sim$):
$A_\sim = (Q_\sim, \Sigma, \delta_\sim, [q_0], F_\sim)$, kde
$Q_\sim = \{\ [q] \mid q \in Q\ \}$,
$F_\sim = \{\ [q] \mid q \in F\ \}$
$\delta_\sim([q], a) = [\delta(q, a)]$
Korektnost definice (co to je?) plyne z
$\big(p \sim q \Rightarrow (p \in F \Leftrightarrow q \in F)\big)$ a z $\big(p \sim q \Rightarrow \delta(p, a) \sim \delta(q, a)\big)$.
Jak ukážeme, že $L(A) = L(A_\sim)$?
Máme tedy ukázat
$\{w \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_0, w) \in F\} = \{w \in \Sigma^* \mid \delta^*_\sim([q_0], w) \in F_\sim\}$
(v jiném značení tedy $q_0 \xrightarrow{w}_A F \Leftrightarrow [q_0] \xrightarrow{w}_{A_\sim} F_\sim$)
....

B-čko se ptá, zda konstrukce onoho podílového automatu vždy vede k minimálnímu automatu (pro daný jazyk).
Co odpoví Á-čko?

Ne nutně, v automatu mohou být ještě stavy, které nejsou dosažitelné z počátečního!
B-čko říká 'no jo, takové já bych ovšem v automatu vůbec nenavrhl'.
Á-čko opáčí, že takové ovšem snadno mohou vzniknout např. při oné (rutinní, algoritmické) konstrukci automatu se stavovou množinou $Q_1 \times Q_2$. Hned dají dohromady příkládek u konstrukce automatu pro sjednocení (regulárních) jazyků ... (Jaký například?)

Nad algoritmem zjišťujícím dosažitelné stavy u daného automatu ovšem už není třeba 'špekulovat'; už jsme jej před chvílí vlastně viděli (kde?).
Algoritmus je také zřejmý z elegantní matematické induktivní definice:
Množina *dosažitelných stavů* automatu $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je *nejmenší* množina $K \subseteq Q$ splňující tyto dvě podmínky:
1/ $q_0 \in K$,
2/ jestliže $q \in K$ a $q' = \delta(q, a)$ pro nějaké $a \in \Sigma$, potom $q' \in K$.

Algoritmus minimalizace

Á-čko s B-čkem tak dali dohromady tento algoritmus minimalizace pro (obecný) konečný automat A:
proveď v libovolném pořadí následující dvě věci (procedury)
- odstraň nedosažitelné stavy (ze zpracovávaného automatu)
- sestroj podílový automat (k zpracovávanému automatu)

(Navíc je možno zároveň převést do normovaného tvaru.)
B-čko si teď všiml, že jeho (přímo sestrojený) automat pro jazyk

$$L_0 = \{\, u \in \{0,1\}^* \mid bn(u) \mod 3 = 0 \text{ a } u \text{ neobsahuje podslovo } 101 \,\}$$

je v normovaném tvaru úplně stejný jako ten, co vznikl kombinací automatů pro jazyky

$$L(A_1) = \{\, u \in \{0,1\}^* \mid bn(u) \mod 3 = 0 \,\}$$

$$L(A_2) = \{\, u \in \{0,1\}^* \mid u \text{ neobsahuje podslovo } 101 \,\}$$

a následnou minimalizací (zahrnující převod do normovaného tvaru).
Byla to náhoda?

Á-čko říká, že ne. Platí prý totiž, že dva automaty minimalizované uvedeným algoritmem jsou (jazykově) ekvivalentní právě tehdy, když jsou izomorfní.
Prý se to dá říci obecně pro minimální automaty, bez odkazu na jakýkoli algoritmus. (Jak přirozeně definujeme, co to znamená, že zadaný automat je minimální?)
A nahlédnout prý to jde celkem snadno z toho postřehu (domněnky) B-čka, že u regulárního jazyka L se lze na systém

$$\{w \backslash L \mid w \in \Sigma^*\}$$

přirozeně dívat jako na konečný automat.

To se Á-čkovi lehce řeklo, že 'nahlédnout to lze celkem snadno', protože už si to důkladně promyslel při svém studiu (na FEI VŠB-TUO). Přiznal, že s tím sám měl nejprve problémy, a že je to třeba postupně 'strávit'.
B-čko se teď chtěl raději ještě vrátit k vyhledávání řetězců.

B-čko si chce mj. ještě ujasnit souvislosti toho značení stavů
$(0 = \varepsilon), (1 = a), (2 = ab), (3 = aba), (4 = abaa), (5 = abaab), (6 = abaaba)$
které Á-čko použil při svém označení stavů (uzlů v grafu).
Tak o tom podiskutují a proberou také jazyky

$$L_q^{in-from-q_0} = \{\, u \mid \delta^*(q_0, u) = q \,\} \text{ (v jiném značení } \{\, u \mid q_0 \xrightarrow{u} q \,\}).$$

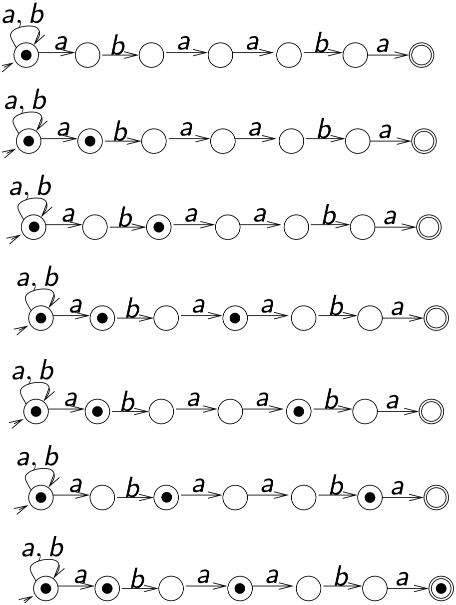
K čemupak asi dojdou? ....

Např. k tomu, že uvažujeme-li $L_q^{in-from-q_0} = \{\, u \mid q_0 \xrightarrow{u} q \,\}$ pro všechny stavy (daného automatu $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$), dostaneme docela zajímavý rozklad na množině Σ^*.
Á-čko sice zase trochu vylekal B-čka slovem 'pravá kongruence' ('ach jo, zas sem tahá jakousi abstraktní matiku', říkal si), ale nakonec za tím níc těžkého nebylo.
(Holt když w_1, w_2 patří do $L_q^{in-from-q_0}$ pro stejné q, tak $w_1 a, w_2' a$ patří do $L_{q'}^{in-from-q_0}$ pro stejné q', konkrétně pro $q' = \delta(q, a)$; to je přece jasné.)
....

B-čko si teď uvědomí, že by nemusel pro každý zadaný řetězec konstruovat příslušný konečný automat sám (jako to udělal s Á-čkem pro *abaaba*), ale že by to mohl svěřit algoritmu (který by naprogramoval).
Á-čko mu navrhne metodu, která může pomoci i v jiných situacích. Začíná mluvit o jakýchsi nedeterministických konečných automatech a nakreslí obrázek ... (první obrázek na dalším slidu).

B-čko na to dlouho poněkud nechápavě zírá (což se mu nelze divit), ale Áčko ho postupně zasvěcuje ...

Vše končí spokojeným mručením B-čka, který obohatil svůj 'programátorský' (či spíše 'algoritmický') arzenál a pochopil, k čemu může být prakticky dobrý takový 'nesmysl' jako je nedeterminitický výpočet. Copak mu asi Á-čko všechno ukázal?


a, b
a b a a b a
a, b
a b a a b a
a, b
a b a a b a
a, b
a b a a b a
a, b
a b a a b a
a, b
a b a a b a
a, b
a b a a b a