Týden 2

Přednáška

Modulární postup – pokračování

Na jazyk
$L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w$ začíná a a končí b nebo začíná b a končí $a\}$
jsme se podívali jako na sjednocení $L = L_1 \cup L_2$, kde
$L_1 = \{w \in \{a,b\}^* \mid w$ začíná a a končí $b\}$,
$L_2 = \{w \in \{a,b\}^* \mid w$ začíná b a končí $a\}$,
zkonstruovali jsme 4-stavový automat A_1 tak, že $L(A_1) = L_1$, a 4-stavový automat A_2 tak, že $L(A_2) = L_2$, a pak jsme aplikovali algoritmickou konstrukci, jejímž výsledkem pro A_1, A_2 byl 16-stavový automat A, pro nějž platí
$L(A) = L(A_1) \cup L(A_2) = L$.

Dosažitelné stavy, normovaný tvar automatu

Pro (obecný) automat $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ jsme uvedli definici dosažitelných stavů:
$\mathit{Reach}(A) = \{q \in Q \mid \exists w : q_0 \xrightarrow{w} q\}$.
Pak jsme uvedli (alternativní) induktivní definici, která je de facto i základem algoritmu, který zjistí všechny dosažitelné stavy (a odstraní nedosažitelné):
$\mathit{Reach}(A)$ je nejmenší množina $K \subseteq Q$, která splňuje následující dvě podmínky:

- $q_0 \in K$,
- když $q \in K$ a $q \xrightarrow{a} q'$ (pro nějaké $a \in \Sigma$), tak $q' \in K$.

Aplikovali jsme příslušný algoritmus na výše uvedený (konkrétní) 16-stavový automat A a po odstranění nedosažitelných stavů jsme tak obdrželi 5-stavový automat A' (který je ekvivalentní A, tedy $L(A') = L(A)$).
Tento A' jsme pak převedli do normovaného tvaru (se stavy označenými $1, 2, 3, 4, 5$).

Redukce konečného automatu

Uvedli jsme, že o automatu řekneme, že je redukovaný, jestliže

- všechny jeho stavy jsou dosažitelné
- a pro každé dva různé stavy q, q' platí $L_q^{toAcc} \neq L_{q'}^{toAcc}$.

Uvědomili jsme si, že výše uvedený 5-stavový A je redukovaný; pro každou dvojici stavů $q \neq q'$ jsme totiž ukázali slovo w tak, že $q \xrightarrow{w} F$ a $q' \not\xrightarrow{w} F$ (tedy $q' \xrightarrow{w} (Q{-}F)$) či naopak $q \not\xrightarrow{w} F$ a $q' \xrightarrow{w} F$; takovému slovu w budeme říkat *rozlišující slovo pro stavy* q, q'.

Podívali jsme se na následující automat (který by vznikl po dotažení modulární konstrukce z první přednášky: má $3 \cdot 4 = 12$ stavů, jež vznikly přejmenováním původních dvojic).

	0	1
$\leftrightarrow s_1$	s_1	s_2
s_2	s_3	s_4
s_3	s_5	s_6
$\leftarrow s_4$	s_7	s_2
s_5	s_8	s_4
s_6	s_9	s_6
$\leftarrow s_7$	s_1	s_9
s_8	s_5	s_{10}
s_9	s_6	s_{11}
s_{10}	s_{12}	s_{10}
s_{11}	s_{11}	s_9
s_{12}	s_8	s_{11}

Rychle jsme zjistili, že všechny stavy jsou dosažitelné a promýšleli jsme, jak zjistit, zda existují dva různé stavy $q, q' \in Q = \{s_1, s_2, \dots, s_{12}\}$ pro něž $L_q^{toAcc} = L_{q'}^{toAcc}$. Jde tedy o zjištění, zda pro q, q' existuje (či neexistuje) rozlišující slovo.
Uvědomili jsme si, že se nabízí induktivní postup, při němž konstruujeme ekvivalence $\sim_0, \sim_1, \sim_2, \dots$ na množině Q definované takto:

$$q \sim_i q' \Leftrightarrow \text{pro stavy } q, q' \text{ neexistuje rozlišující slovo délky } \leq i.$$

Každé ekvivalenci $\sim_i$ odpovídá příslušný rozklad R_i na množině Q.
Výchozí R_0 jsme hravě sestrojili; má dvě třídy, přijímající a nepřijímající stavy.

$$R_0: \quad \text{I} = \{s_1, s_4, s_7\}, \ \text{II} = \{s_2, s_3, s_5, s_6, s_8, s_9, s_{10}, s_{11}, s_{12}\}$$

Pak jsme sestrojili R_1 (postupem popsaným ve studijním textu).

$$R_1: \quad \text{I} = \{s_1, s_4, s_7\}, \ \text{II} = \{s_2, s_5\}, \quad \text{III} = \{s_3, s_6, s_8, s_9, s_{10}, s_{11}, s_{12}\}.$$

Uvědomili jsme si, že postup se opírá o toto pozorování:

> pokud pro q, q' existuje rozlišující slovo délky $i + 1$, tak nutně existuje $b \in \Sigma$ (v našem případě $\Sigma = \{0, 1\}$) tak, že $q \xrightarrow{b} q''$, $q' \xrightarrow{b} q'''$ a pro q'', q''' existuje rozlišující slovo délky i.

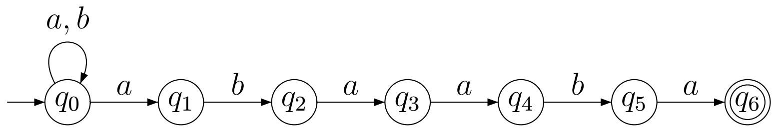
(Pozn.: použili jsme symbol b pro proměnnou, ať si uvědomíme, že nemusíme vždy stereotypně používat a.)
Kdybychom pokračovali, zjistili bychom, že

R_2: $\mathrm{I} = \{s_1, s_4\}$, $\mathrm{II} = \{s_7\}$, $\mathrm{III} = \{s_2, s_5\}$, $\mathrm{IV} = \{s_3, s_8\}$, $\mathrm{V} = \{s_6, s_9, s_{10}, s_{11}, s_{12}\}$,

atd., až bychom dospěli k pevnému bodu, tedy k rozkladu, který se již nezjemní. Ten má 3-prvkovou třídu $\{s_6, s_9, s_{11}\}$ a pak už jen jednoprvkové třídy.
Redukcí (původně 12-stavového) automatu tedy vznikne ekvivalentní automat s 10 stavy (jeho stavy odpovídají třídám závěrečného rozkladu).

Nedeterministické konečné automaty

Definici nedeterministického konečného automatu
$A = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$,
kde $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$ ($\mathcal{P}(Q)$ značí množinu všech podmnožin množiny Q),
$I \subseteq Q$,
jsme si osvětlili na následujícím příkladu (kde $I = \{q_0\}$, $\delta(q_0, a) = \{q_0, q_1\}$, $\delta(q_2, b) = \emptyset$, atd.)



a uvědomili jsme si, že pro automat A na obrázku je $L(A) = \{w \mid \exists q \in I : q \xrightarrow{w} F\}$ roven jazyku, pro nějž jsme konstruovali (deterministický) konečný automat na první přednášce, totiž jazyku
$L(A) = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ má sufix } abaaba\}$.
Připomněli jsme si, že existuje algoritmus, který převede zadaný nedeterministický konečný automat na ekvivalentní deterministický; tento algoritmus je popsán ve studijním textu (formou „knoflíkové hry“).

Sekce pro hlubší zájemce – důkazy

K větě 3.18 (z části 3.8., str. 87)

Věta. Jazyk $L \subseteq \Sigma^*$ je regulární (tzn. přijímaný konečným automatem) právě tehdy, když je množina kvocientů $\{w \backslash L \mid w \in \Sigma^*\}$ konečná.

jsme na první přednášce ukázali důkaz implikace "$\Rightarrow$". Nyní jsme se věnovali opačnému směru "$\Leftarrow$".
Uvažujme tedy jazyk $L \subseteq \Sigma^*$ takový, že množina $\mathcal{M} = \{w \backslash L \mid w \in \Sigma^*\}$ je konečná. Všimněme si, že $L \in \mathcal{M}$, neboť $L = \varepsilon \backslash L$; označme $L = L_0$.
Tedy $\mathcal{M} = \{L_0, L_1, L_2, \ldots, L_k\}$ pro ($L_0 = L$ a) nějaké jazyky $L_1, L_2, \ldots, L_k$ ($k \geq 0$).

Klíčové (a snadno odvoditelné) pozorování je toto:

$$wa\backslash L = a\backslash(w\backslash L)\,.$$

Můžeme tedy definovat automat $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde $Q = \{q_0, q_1, q_2, \ldots, q_k\}$ a $\delta(q_i, a) = q_j \Leftrightarrow L_j = a\backslash L_i$. Pak platí

$$(\forall i, w :)\ \ q_0 \xrightarrow{w} q_i \Leftrightarrow L_i = w\backslash L\,.$$

Podrobně lze zase ukázat indukcí podle délky w:

(Základní případ.) Pro $|w| = 0$, tedy $w = \varepsilon$, je to jasné ($q_0 \xrightarrow{\varepsilon} q_0$, $L_0 = \varepsilon\backslash L$).

(Indukce; pro případ $w = va$.)

(Implikace $\Rightarrow$.) Jestliže $q_0 \xrightarrow{va} q_i$, tedy $q_0 \xrightarrow{v} q_j \xrightarrow{a} q_i$ pro nějaké j, tak podle indukčního předpokladu $L_j = v\backslash L$ a podle definice automatu $L_i = a\backslash L_j$, tedy $L_i = a\backslash(v\backslash L) = va\backslash L$.

(Implikace $\Leftarrow$.) Jestliže $L_i = va\backslash L$, pak podle indukčního předpokladu pro $L_j = v\backslash L$ platí $q_0 \xrightarrow{v} q_j$; jelikož $L_i = va\backslash L = a\backslash(v\backslash L) = a\backslash L_j$, máme podle definice automatu $q_j \xrightarrow{a} q_i$, tedy $q_0 \xrightarrow{v} q_j \xrightarrow{a} q_i$ a tudíž $q_0 \xrightarrow{va} q_i$.

Jelikož $w \in L \Leftrightarrow \varepsilon \in w\backslash L$, přidáme definici $F = \{q_i \mid \varepsilon \in L_i\}$ a máme $q_0 \xrightarrow{w} F \Leftrightarrow w \in L$, tedy $L(A) = L$.
(Alternativně bychom mohli ukázat, že platí $L_{q_i}^{toAcc} = L_i$, a tedy $L(A) = L_{q_0}^{toAcc} = L_0 = L$.)

Partie textu k prostudování

V návaznosti na část 3.3. (modulární návrh) se jedná zejména o část 3.4. (dosažitelné stavy, normovaný tvar), část 3.6. (minimalizace konečných automatů) a 3.9. (nedeterministické konečné automaty). (Máte si udělat přinejmenším dobrou první představu a zamyslet se nad příklady, speciálně těmi plánovanými na cvičení, ať se můžete na cvičení aktivně účastnit a případné problémy si tam objasnit.)

Cvičení

Prezentace referátů

Referát č. 1

Vysvětlete operaci levého kvocientu pro jazyky, tedy operaci $L_2\backslash L_1$ (definice, příklady, ...).
Vysvětlete, co znamená tvrzení "operace levého kvocientu je asociativní". Pak toto tvrzení dokažte či vyvraťte.

Referát č. 2

Vysvětlete, proč pro konečný automat $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ a jazyk $L \subseteq \Sigma^*$ je (levý kvocient) $L\backslash L(A)$ sjednocením jazyků L_q^{toAcc} pro vybrané stavy q. Pro které ?

Příklad 2.1

	0	1
$\rightarrow 1$	1,2	1
2	3	-
3	-	4
4	-	-
$\rightarrow 5$	5	5,6
6	-	7
7	-	8
8	-	9
9	9	9

NKA (nedeterministický konečný automat) A zadaný uvedenou tabulkou zadejte jako (matematickou) strukturu $A = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$ a pak zakreslete grafem. Charakterizujte co nejjednodušeji jazyk $L(A)$, tedy množinu $\{w \in \Sigma^* \mid \exists q \in I : q \xrightarrow{w} F\}$.
Pak zkonstruujte ekvivalentní DKA (deterministický konečný automat). Dokončete tedy konstrukci následující tabulky.

		0	1	
$\rightarrow$	K_0	K_1	K_2	$K_0 = \{1, 5\}$
	K_1	K_3		$K_1 = \{1, 2, 5\}$
	K_2			$K_2 = \{1, 5, 6\}$
	K_3			$K_3 = \{1, 2, 3, 5\}$

Výsledný DKA zredukujte a převeďte do normovaného tvaru.

Příklad 2.2

Připomeňme si větu:
Věta. Jazyk $L \subseteq \Sigma^*$ je regulární (tzn. přijímaný konečným automatem) právě tehdy, když je množina kvocientů $\{w \backslash L \mid w \in \Sigma^*\}$ konečná.
Vysvětlete, proč pro jazyk

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

jsou jazyky (kvocienty) $a \backslash L$, $aa \backslash L$, $aaa \backslash L$, $\ldots$ navzájem různé. Vyvoďte, že L není regulární.

Příklad 2.3

Vybudujte si intuici o (ne)regulárních jazycích promyšleným zodpovězením otázek na s. 88 a 89. Ty se týkají (ne)regularity jazyků
$\{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \bmod 2 = 0\}$

$\{w \in \{a,b\}^* \mid w$ začíná nebo končí dvojicí stejných písmen $\}$
$\{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a < |w|_b\}$
$\{w \in \{a,b,c\}^* \mid$ jestliže w neobsahuje podřetězec abc, pak končí $bca\}$
$\{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a > |w|_b$ nebo w končí $baa\}$
$\{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a > |w|_b$ nebo $|w|_b \geq 2\}$
$\{u \mid$ ex. $w \in \{a,b\}^*$ tak, že $u = ww^R\}$, stručněji také psáno $\{ww^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$,
$\{w \in \{a,b\}^* \mid w = w^R\}$
$\{w \in \{a\}^* \mid w = w^R\}$
$\{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$
$\{ww \mid w \in \{a\}^*\}$
$\{w \in \{a,b\}^* \mid$ rozdíl počtů znaků a a znaků b ve w je větší než $100\}$
$\{w \in \{a,b\}^* \mid$ součin $|w|_a$ a $|w|_b$ je větší nebo roven $100\}$
$\{w \in \{a\}^* \mid |w|$ je prvočíslo $\}$

Příklad 2.4

Pro následující vztahy vysvětlete, proč obecně platí či neplatí.

- $L_1 \cdot L_2 = L_2 \cdot L_1$
- $L_1(L_2 \cup L_3) = L_1L_2 \cup L_1L_3$
- $(L_1 \cup L_2)^* = L_1^*(L_2 \cdot L_1^*)^*$
- $(L_1 \cap L_2)^* = L_1^* \cap L_2^*$
- $w \cdot (w\backslash L) = L$