Týden 12

Přednáška

Metoda „Rozděl a panuj“

Podrobně jsme si odvodili řešení rekurentních rovnic užitečných při analýze složitosti rekurzivních algoritmů, jak je to probráno v části 10.2.2.

Třída PTIME

Připomněli jsme si definici třídy PTIME. Přitom jsem zdůraznil, že všechny problémy ve studijním textu (nejen ty, které jsou v PTIME) je třeba důkladně promyslet – pak nemůže být pro nikoho problémem u zkoušky nějaký požadovaný problém přesně definovat a uvést příklady instancí s pozitivní odpovědí a instancí s negativní odpovědí.

Nedeterministické algoritmy a jejich složitost; třída NPTIME

Ujasnili jsme si pojem nedeterministického algoritmu (Turingova stroje) a definici toho, co to znamená, že nějaký nedeterministický Turingův stroj M rozhoduje daný problém P.

Také jsme přímočaře rozšířili pojem (časové) složitosti na nedeterministické stroje a definovali jsme třídu NPTIME.

Ukázali jsme si (nedeterministické) algoritmy prokazující, že problém SAT (splnitelnost booleovských formulí) a IS (Independent Set, rozhodovací verze problému nezávislé množiny v grafu) jsou v NPTIME.

Polynomiální převeditelnost; NP-úplné problémy

Již známý pojem převeditelnosti mezi problémy jsme využili v definici polynomiální převeditelnosti mezi problémy. (Příslušný převádějící algoritmus musí mít polynomiální časovou složitost, tedy časovou složitost omezenou polynomem.)

Všimli jsme si, jak může prokázaná polynomiální převeditelnost mezi problémy pomoci v určování (ne)příslušnosti k PTIME či NPTIME.

Definovali jsme pojem NP-úplného problému; problémy SAT a IS jsou příklady NP-úplných problémů.

Sekce pro hlubší zájemce – důkazy

Uvedli jsme si jen hlavní myšlenku nerozhodnutelnosti pravdivosti uzavřených formulí 1.řádu s predikáty $PLUS(x, y, z)$ (tj. $x + y = z$) a $MULT(x, y, z)$ (tj. $x \cdot y = z$) ve standardním modelu aritmetiky $(\mathbb{N}, +, \cdot)$.

(Využili jsme nerozhodnutelnosti existence akceptujícího výpočtu zadaného Turingova stroje M na zadaném slově w.)

Pak jsme si nastínili důkaz rozhodnutelnosti Presburgerovy aritmetiky (využívající jen predikát $PLUS(x, y, z)$), tedy důkaz věty 9.3. z kapitoly 9.

Partie textu k prostudování

Část 10.2.2. (metoda „rozděl a panuj“), části 8.3., 8.4., 8.5. (třída PTIME, třída NPTIME, NP-úplné problémy).

Cvičení

Prezentace referátů

Referát č. 20 (Rozhodnutelnost a nerozhodnutelnost)
Uvažujme problém

Název: UHP (*Uniform Halting Problem*)

Vstup: Turingův stroj M.

Otázka: Zastaví se M na každý vstup?

Zjistěte, zda tento problém je rozhodnutelný či nerozhodnutelný a své zjištění prokažte. (Můžete např. vyjít ze stručné zmínky v textu
`http://www.cs.vsb.cz/jancar/TEORET-INF/teoret-inf.pdf`.)
Referát č. 21 (Převeditelnost mezi problémy)
Demonstrujte myšlenku převeditelnosti IPKP (iniciálního Postova korespondenčního problému) na PKP (Postův korespondenční problém). (Můžete vyjít např. z příslušné animace, zvolte si ale jiný příklad, na němž myšlenku srozumitelně předvedete a vysvětlíte.)
Referát č. 22 (Časová složitost algoritmů, asymptotická notace)
Podejte matematický důkaz (využívající např. l'Hospitalova pravidla) toho, že je-li $f(n) \leq p(n)$ pro nějaký polynom p a $g(n) \geq c^n$ pro nějakou konstantu $c > 1$, tak platí $f \in o(g)$. Podobně to ukažte pro případ, kde $f(n) \leq (\log n)^k$ pro nějakou konstantu k a $g(n) \geq n^c$ pro nějakou konstantu $c > 0$.

Příklady

Příklad 12.1

Vysvětlete, co to je doplňkový problém k problému P (typu ANO/NE). Pak konkrétně definujte doplňkový problém Non-Eq-CFG k problému Eq-CFG (ekvivalence bezkontextových gramatik).

Příklad 12.2

Vysvětlete podrobně, co to znamená, když řekneme, že HP$\rightsquigarrow$Non-Eq-CFG (tj. že Halting Problem je převeditelný na problém Non-Eq-CFG). (Převeditelnost HP$\rightsquigarrow$Non-Eq-CFG zde nedokazujeme, ale dále ji bereme jako fakt.)

Příklad 12.3

Je možné, že oba problémy Eq-CFG a Non-Eq-CFG jsou částečně rozhodnutelné? Umíte prokázat částečnou rozhodnutelnost alespoň jednoho z nich?

Příklad 12.4

Vysvětlete, co dělá univerzální Turingův stroj U, když dostane jako vstup slovo tvaru uv, kde slovo u je kódem stroje U.

Příklad 12.5

Uveďte alespoň tři vlastnosti Turingových strojů, pro něž plyne nerozhodnutelnost z Riceovy věty, a alespoň tři vlastnosti, pro něž nerozhodnutelnost z Riceovy věty neplyne.

Příklad 12.6

Nechť $a, b > 1$. Ukažte:

- $\exists c : \forall x : \log_a x = c \cdot \log_b x$ (tedy $\log_a n \in \Theta(\log_b n)$)
- $a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$ (návod: aplikujte na obě strany funkci $\log_b$)