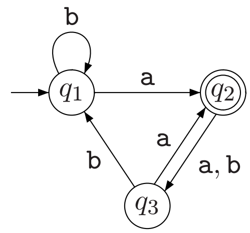
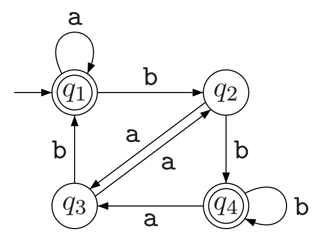
Cvičení 2

Příklad 1: Na následujícím obrázku jsou zobrazeny diagramy dvou deterministických konečných automatů M_1 a M_2. Odpovězte na následující otázky týkající se těchto automatů.



M_1



M_2

a) Jaký je počáteční stav M_1?

b) Jaká je množina přijímajících stavů M_1?

c) Jaký je počáteční stav M_2?

d) Jaká je množina přijímajících stavů M_2?

e) Jakou sekvencí stavů projde M_1 při vstupu `aabb`?

f) Přijímá M_1 slovo `aabb`?

g) Přijímá M_2 slovo ε?

Cvičení 3

Příklad 2:

a) Uveďte formální definici automatů M_1 a M_2 zobrazených v příkladě 1.

b) Automat M je formálně definován jako $(\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{\mathtt{u}, \mathtt{d}\}, \delta, q_3, \{q_3\})$, kde funkce δ je dána následující tabulkou. Nakreslete stavový diagram tohoto automatu.

	u	d
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_3
q_3	q_2	q_4
q_4	q_3	q_5
q_5	q_4	q_5

c) Uveďte stavové diagramy deterministických konečných automatů, které rozpoznávají následující jazyky. V obou případech je abeceda $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$:

- $\{w \mid w$ začíná znakem `1` a končí znakem `0`$\}$.

- $\{w \mid w$ obsahuje alespoň tři znaky 1$\}$.

Příklad 3: Uveďte stavové diagramy deterministických konečných automatů, které rozpoznávají následující jazyky. Ve všech případech je abeceda $\{0, 1\}$.

a) $\{w \mid w$ obsahuje podslovo 0101, tj. $w = x0101y$ pro nějaká x a $y\}$.

b) $\{w \mid w$ má délku alespoň 3 a jeho třetí symbol je 0$\}$.

c) $\{w \mid w$ začíná symbolem 0 a jeho délka je lichá, nebo začíná symbolem 1 a jeho délka je sudá$\}$.

d) $\{w \mid w$ neobsahuje podslovo 110$\}$.

Příklad 4: Uveďte stavové diagramy deterministických konečných automatů, které rozpoznávají následující jazyky. Ve všech případech je abeceda $\{0, 1\}$.

a) $\{w \mid$ délka slova w je nejvýše 5$\}$.

b) $\{w \mid w$ je libovolné slovo, kromě 11 a 111$\}$.

c) $\{w \mid$ na všech lichých pozicích slova w se vyskytuje symbol 1$\}$.

d) $\{w \mid w$ obsahuje nejméně dva symboly 0 a nejvýše jeden symbol 1$\}$.

Příklad 5: Uveďte stavové diagramy deterministických konečných automatů, které rozpoznávají následující jazyky. Ve všech případech je abeceda $\{0, 1\}$.

a) $\{0, \varepsilon\}$.

b) $\{w \mid w$ obsahuje sudý počet symbolů 0 nebo právě dva symboly 1$\}$.

c) Prázdná množina.

d) Všechna slova kromě prázdného slova.

Příklad 6: Pro každý z následujících jazyků navrhněte nedeterministický konečný automat s daným počtem stavů. (Ve všech případech je abeceda $\{0, 1\}$.)

a) Pro jazyk $\{w \mid w$ končí 00$\}$ se třemi stavy.

b) Pro jazyk $\{w \mid w$ obsahuje podslovo 0101, tj. $w = x0101y$ pro nějaká x a $y\}$ s pěti stavy.

c) Pro jazyk $\{w \mid w$ obsahuje sudý počet symbolů 0 nebo právě dva symboly 1$\}$ se šesti stavy.

Příklad 7: Pro každý z následujících jazyků navrhněte nedeterministický konečný automat s daným počtem stavů. (Ve všech případech je abeceda $\{0, 1\}$.)

a) Pro jazyk $\{0\}$ se dvěma stavy.

b) Pro jazyk $\{\texttt{0}^i\texttt{1}^j\texttt{0}^k \mid i, j \geq 0,\ k \geq 1\}$ se třemi stavy.

c) Pro jazyk $\{\varepsilon\}$ s jedním stavem.

d) Pro jazyk $\{\texttt{0}^i \mid i \geq 0\}$ s jedním stavem.

Příklad 8: Sestrojte nedeterministické konečné automaty rozpoznávající sjednocení následujících jazyků (abeceda je ve všech případech $\{\texttt{0}, \texttt{1}\}$):

a) Jazyka $L_1 = \{w \mid w$ začíná znakem 1 a končí znakem 0$\}$
a jazyka $L_2 = \{w \mid w$ obsahuje alespoň tři znaky 1$\}$.

b) Jazyka $L_3 = \{w \mid w$ obsahuje podslovo 0101, tj. $w = x\texttt{0101}y$ pro nějaká x a $y\}$
a jazyka $L_4 = \{w \mid w$ neobsahuje podslovo 110$\}$.

Příklad 9: Ukažte, že ke každému nedeterministickému konečnému automatu lze sestrojit ekvivalentní nedeterministický konečný automat s právě jedním přijímajícím stavem.

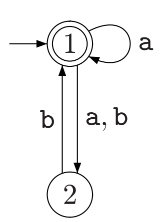
Poznámka: Uvažujte pouze nedeterministické automaty bez ε-přechodů. Dejte pozor na případ, kdy $\varepsilon \in L(A)$.

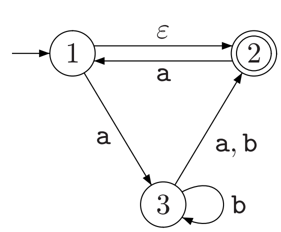
Příklad 10:

a) Ukažte, že pokud M je deterministický konečný automat rozpoznávající jazyk B, pak pokud prohodíme v M přijímající a nepřijímající stavy, dostaneme deterministický konečný automat přijímající doplněk B, z čehož plyne, že třída regulárních jazyků je uzavřená vůči doplňku.

b) Ukažte na nějakém konkrétním příkladě, že jestliže M je nedeterministický konečný automat rozpoznávající jazyk C, pak prohození jeho přijímajících a nepřijímajících stavů nemusí nutně vést k automatu, který by rozpoznával doplněk jazyka C. Je třída jazyků rozpoznávaných nedeterministickými konečnými automaty uzavřená vzhledem k doplňku? Vaši odpověď zdůvodněte.

Příklad 11: Zkonstruujte k oběma následujícím nedeterministickým automatům ekvivalentní deterministické konečné automaty.





Příklad 12:

a) Definujme $B_n = \{\mathtt{a}^k \mid k \text{ je násobkem } n\}$. Ukažte, že pro libovolné $n \geq 1$ je jazyk B_n regulární.

b) Definujme $C_n = \{x \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^* \mid x \text{ je binární číslo, které je násobkem } n\}$. Ukažte, že pro libovolné $n \geq 1$ je jazyk C_n regulární.

Cvičení 4

Příklad 13: Definujme následující jazyk nad abecedou $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^*$:

$$D = \{w \mid w \text{ obsahuje stejný počet výskytů podslov } \mathtt{01} \text{ a } \mathtt{10}\}\,.$$

Například slovo `101` patří do D, protože `101` obsahuje jednou `01` a jednou `10`, ale například slovo `1010` nepatří do D, protože `1010` obsahuje dvakrát `10`, ale jen jednou `01`.

Ukažte, že D je regulární jazyk.

Příklad 14: Sestrojte zobecněné nedeterministické konečné automaty rozpoznávající zřetězení následujících jazyků (abeceda je ve všech případech $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$):

a) Jazyka $L_1 = \{w \mid \text{délka slova } w \text{ je nejvýše } 5\}$
a jazyka $L_2 = \{w \mid \text{na všech lichých pozicích slova } w \text{ se vyskytuje symbol } \mathtt{1}\}$.

b) Jazyka $L_3 = \{w \mid w \text{ obsahuje alespoň tři znaky } \mathtt{1}\}$ a jazyka $L_4 = \emptyset$.

Příklad 15: Sestrojte zobecněné nedeterministické konečné automaty rozpoznávající iterace následujících jazyků (abeceda je ve všech případech $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$):

a) Jazyka $L_1 = \{w \mid w \text{ obsahuje alespoň tři znaky } \mathtt{1}\}$.

b) Jazyka $L_2 = \{w \mid w \text{ obsahuje nejméně dva symboly } \mathtt{0} \text{ a nejvýše jeden symbol } \mathtt{1}\}$.

c) Jazyka $L_3 = \emptyset$.

Příklad 16: Ukažte na protipříkladu, že následující konstrukce nedokazuje, že třída regulárních jazyků je uzavřená vůči iteraci. (Jinými slovy, ukažte nějaký konečný automat M takový, že zkonstruovaný M' nerozpoznává iteraci jazyka $L(M)$). Popište, proč daná konstrukce nefunguje a jak by se dala opravit.

Konstrukce: Mějme zobecněný nedeterministický konečný automat $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ (s jedním počátečním stavem) rozpoznávající jazyk L_1. Zobecněný nedeterministický automat $M' = (Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$ rozpoznávající jazyk L_1^* zkonstruujeme následovně:

- $Q' = Q$

- $q'_0 = q_0$
- $F' = \{q_0\} \cup F$
- Funkci δ' definujeme takto: Pro libovolné $q \in Q'$ je $\delta'(q,a) = \delta(q,a)$ pro $a \in \Sigma$, a

$$\delta'(q,\varepsilon) = \begin{cases} \delta(q,\varepsilon) \cup \{q_0\} & \text{pokud } q \in F \\ \delta(q,\varepsilon) & \text{jinak} \end{cases}$$

Příklad 17: Uveďte regulární výrazy generující následující jazyky. Ve všech případech je abeceda $\{\mathtt{0},\mathtt{1}\}$.

a) $\{w \mid w$ začíná znakem `1` a končí znakem `0`$\}$.

b) $\{w \mid w$ obsahuje alespoň tři znaky `1`$\}$.

c) $\{w \mid w$ obsahuje podslovo `0101`, tj. $w = x\mathtt{0101}y$ pro nějaká x a $y\}$.

d) $\{w \mid w$ má délku alespoň 3 a jeho třetí symbol je `0`$\}$.

e) $\{w \mid w$ začíná symbolem `0` a jeho délka je lichá, nebo začíná symbolem `1` a jeho délka je sudá$\}$.

f) $\{w \mid w$ neobsahuje podslovo `110`$\}$.

g) $\{w \mid$ délka slova w je nejvýše $5\}$.

Příklad 18: Uveďte regulární výrazy generující následující jazyky. Ve všech případech je abeceda $\{\mathtt{0},\mathtt{1}\}$.

a) $\{w \mid w$ je libovolné slovo, kromě `11` a `111`$\}$.

b) $\{w \mid$ na všech lichých pozicích slova w se vyskytuje symbol `1`$\}$.

c) $\{w \mid w$ obsahuje nejméně dva symboly `0` a nejvýše jeden symbol `1`$\}$.

d) $\{0, \varepsilon\}$.

e) $\{w \mid w$ obsahuje sudý počet symbolů `0` nebo právě dva symboly `1`$\}$.

f) Prázdná množina.

g) Všechna slova kromě prázdného slova.

Příklad 19: Ke každému z následujících regulárních výrazů sestrojte odpovídající zobecněný nedeterministický konečný automat:

a) $(0+1)^*000(0+1)^*$

b) $((00)^*11+01)^*$

c) $\emptyset^*$

Příklad 20: Pro každý z následujících jazyků uveďte alespoň dvě slova, která do něj patří, a alespoň dvě slova, která do něj nepatří. Ve všech případech předpokládejte, že se jedná o jazyky nad abecedou $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$.

a) $\mathtt{a}^*\mathtt{b}^*$

b) $\mathtt{a}(\mathtt{ba})^*b$

c) $\mathtt{a}^* + \mathtt{b}^*$

d) $(\mathtt{aaa})^*$

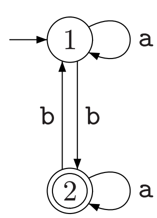
e) $\Sigma^*\mathtt{a}\Sigma^*\mathtt{b}\Sigma^*\mathtt{a}\Sigma^*$

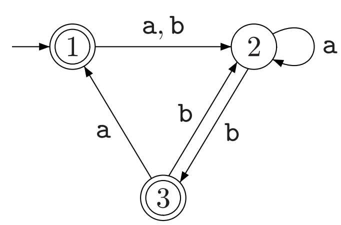
f) $\mathtt{aba} + \mathtt{bab}$

g) $(\varepsilon + \mathtt{a})\mathtt{b}$

h) $(\mathtt{a} + \mathtt{ba} + \mathtt{bb})\Sigma^*$

Příklad 21: K oběma následujícím automatům sestrojte ekvivalentní regulární výrazy:





Příklad 22: *Zrcadlovým obrazem* libovolného slova $w = a_1 a_2 \cdots a_n$ je slovo, označované w^R, které je stejné jako slovo w až na to, že jeho znaky jsou zapsány v opačném pořadí, tj. $w^R = a_n \cdots a_2 a_1$. Pro libovolný jazyk L definujme $L^R = \{w^R \mid w \in L\}$.

Ukažte, že jestliže L je regulární, pak i L^R je regulární.

Cvičení 5

Příklad 23: Ukažte, že následující jazyky nejsou regulární:

a) $L_1 = \{\mathtt{0}^n\mathtt{1}^n\mathtt{2}^n \mid n \geq 0\}$

b) $L_2 = \{ww \mid w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*\}$

Příklad 24: Popište, kde je chyba v následujícím důkaze, že jazyk 0^*1^* není regulární. (Nějaká chyba zde musí být, protože jazyk 0^*1^* *je* regulární.)

DŮKAZ: Jedná se o důkaz sporem. Předpokládejme, že jazyk 0^*1^* je regulární. Podle pumping lemmatu existuje určitá konstanta n. Zvolme $z = 0^n1^n$. Slovo z zjevně patří do jazyka 0^*1^*. Na druhou stranu vidíme, že pumpováním určitého podslova dostaneme slovo, které do tohoto jazyka nepatří. Dospěli jsme ke sporu, a jazyk 0^*1^* tedy nemůže být regulární.

Příklad 25: Definujme

$$\Sigma_3 = \left\{ \begin{bmatrix} \mathtt{0} \\ \mathtt{0} \\ \mathtt{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathtt{0} \\ \mathtt{0} \\ \mathtt{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathtt{0} \\ \mathtt{1} \\ \mathtt{0} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \mathtt{1} \\ \mathtt{1} \\ \mathtt{1} \end{bmatrix} \right\}.$$

Abeceda Σ_3 tedy obsahuje všechny trojice symbolů `0` a `1`. Na slovo tvořené symboly ze Σ_3 se můžeme dívat jako na trojici řádků tvořených symboly `0` a `1`. Považujme každý takový řádek za zápis čísla ve dvojkové soustavě a definujme

$$B = \{w \in \Sigma_3 \mid \text{spodní řádek slova } w \text{ je součtem obou horních řádků}\}.$$

Ukažte, že jazyk B je regulární.

Návod: Je snadnější pracovat s jazykem B^R. Můžete předpokládat, že tvrzení z příkladu 22 platí.

Příklad 26: Definujme

$$\Sigma_2 = \left\{ \begin{bmatrix} \mathtt{0} \\ \mathtt{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathtt{0} \\ \mathtt{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathtt{1} \\ \mathtt{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathtt{1} \\ \mathtt{1} \end{bmatrix} \right\}.$$

Abeceda Σ_2 tedy obsahuje všechny dvojice symbolů `0` a `1`. Na slovo nad abecedou Σ_2 se můžeme dívat jako na dva řádky symbolů `0` a `1`, které můžeme chápat jako zápisy čísel ve dvojkové soustavě. Definujme jazyk

$$C = \{w \in \Sigma_2 \mid \text{spodní řádek slova } w \text{ je trojnásobkem horního řádku}\}.$$

Například $\begin{bmatrix} \mathtt{0} \\ \mathtt{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathtt{0} \\ \mathtt{1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathtt{1} \\ \mathtt{1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathtt{0} \\ \mathtt{0} \end{bmatrix} \in C$, ale $\begin{bmatrix} \mathtt{0} \\ \mathtt{1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathtt{0} \\ \mathtt{1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathtt{1} \\ \mathtt{0} \end{bmatrix} \notin C$. Ukažte, že jazyk C je regulární.

(Můžete předpokládat, že platí tvrzení z příkladu 22.)

Příklad 27: Definujme abecedu Σ_2 stejně jako v příkladě 26. Považujme oba řádky za zápis binárních čísel a definujme

$$D = \{w \in \Sigma_2 \mid \text{v horním řádku slova } w \text{ je větší číslo než ve spodním}\}.$$

Například $\begin{bmatrix} \mathtt{0} \\ \mathtt{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathtt{1} \\ \mathtt{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathtt{1} \\ \mathtt{1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathtt{0} \\ \mathtt{0} \end{bmatrix} \in D$, ale $\begin{bmatrix} \mathtt{0} \\ \mathtt{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathtt{0} \\ \mathtt{1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathtt{1} \\ \mathtt{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathtt{0} \\ \mathtt{0} \end{bmatrix} \notin D$. Ukažte, že jazyk D je regulární.

Příklad 28: Definujme abecedu Σ_2 stejně jako v příkladě 26. Považujme horní a spodní řádek za slova v abecedě $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$ a definujme

$$E = \{w \in \Sigma_2 \mid \text{spodní řádek slova } w \text{ je zrcadlovým obrazem horního řádku slova } w\}.$$

Ukažte, že jazyk E není regulární.

Příklad 29: Uvažujme následující nový typ konečného automatu nazvaný *universální nedeterministický konečný automat*. Universální nedeterministický konečný automat M je pětice $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, která přijímá slovo $w \in \Sigma^*$ právě tehdy, jestliže *všechny* možné výpočty automatu M na slově w skončí v nějakém stavu z F. Všimněte si, že naproti tomu běžný nedeterministický konečný automat přijímá slovo w, jestliže *existuje* alespoň jeden výpočet, který skončí v přijímajícím stavu. Ukažte, že universální nedeterministické automaty rozpoznávají právě třídu regulárních jazyků.

Příklad 30: Mějme abecedu $\Sigma = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{+}, \mathtt{=}\}$ a definujme jazyk

$$ADD = \{x\mathtt{=}y\mathtt{+}z \mid x,\ y \text{ a } z \text{ jsou binární čísla a } x \text{ je součtem } y \text{ a } z\}$$

Ukažte, že jazyk ADD není regulární.

Příklad 31: Ukažte, že jazyk

$$F = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j\mathtt{c}^k \mid i, j, k \geq 0, \text{ a pokud } i = 1, \text{ pak } j = k\}$$

splňuje všechny podmínky podmínky pumping lemmatu, a přesto není regulární. Vysvětlete proč tento fakt není ve sporu s pumping lemmatem.

Příklad 32: Ukažte, že pro každé $k > 1$ existuje jazyk $A_k \subseteq \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^*$, který je rozpoznáván nějakým deterministickým konečným automatem s k stavy, ale není rozpoznáván žádným deterministickým konečným automatem s $k - 1$ stavy.

Cvičení 6

Příklad 33: Mějme následující gramatiku:

$$\begin{array}{lcl} E & \longrightarrow & E\mathtt{+}T \mid T \\ T & \longrightarrow & T\mathtt{*}F \mid F \\ F & \longrightarrow & \mathtt{(}E\mathtt{)} \mid \mathtt{a} \end{array}$$

Uveďte derivační strom a derivaci pro každé z následujících slov:

a) `a`

b) `a+a`

c) `a+a+a`

d) `((a))`

Příklad 34: Odpovězte na následující otázky týkající se následující bezkontextové gramatiky G:

$$
\begin{array}{rcl}
R & \longrightarrow & XRX \mid S \\
S & \longrightarrow & \mathtt{a}T\mathtt{b} \mid \mathtt{b}T\mathtt{a} \\
T & \longrightarrow & XTX \mid X \mid \varepsilon \\
X & \longrightarrow & \mathtt{a} \mid \mathtt{b}
\end{array}
$$

a) Co jsou množiny terminálů a neterminálů gramatiky G?

b) Uveďte příklad tří slov, která patří do $L(G)$.

c) Uveďte příklad tří slov, která nepatří do $L(G)$.

d) Platí nebo neplatí $T \Rightarrow \mathtt{aba}$?

e) Platí nebo neplatí $T \Rightarrow^* \mathtt{aba}$?

f) Platí nebo neplatí $T \Rightarrow T$?

g) Platí nebo neplatí $T \Rightarrow^* T$?

h) Platí nebo neplatí $XXX \Rightarrow^* \mathtt{aba}$?

i) Platí nebo neplatí $X \Rightarrow^* \mathtt{aba}$?

j) Platí nebo neplatí $T \Rightarrow^* XX$?

k) Platí nebo neplatí $T \Rightarrow^* XXX$?

l) Platí nebo neplatí $S \Rightarrow^* \varepsilon$?

m) Popište slovně jazyk $L(G)$.

Příklad 35: Uveďte bezkontextovou gramatiku pro každý z následujících jazyků. Ve všech případech je abeceda $\Sigma = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$.

a) $\{w \mid w$ obsahuje alespoň tři symboly $\mathtt{1}\}$

b) $\{w \mid w$ začíná i končí stejným symbolem$\}$

c) $\{w \mid$ délka w je lichá$\}$

d) $\{w \mid$ délka w je lichá a prostřední symbol je $\mathtt{0}\}$

e) $\{w \mid w = w^R\}$

f) prázdný jazyk

Příklad 36: Mějme následující gramatiku generující anglické věty:

$$
\begin{array}{rcl}
\langle\text{SENTENCE}\rangle & \longrightarrow & \langle\text{NOUN-PHRASE}\rangle\langle\text{VERB-PHRASE}\rangle \\
\langle\text{NOUN-PHRASE}\rangle & \longrightarrow & \langle\text{CMPLX-NOUN}\rangle \mid \langle\text{CMPLX-NOUN}\rangle\langle\text{PREP-PHRASE}\rangle \\
\langle\text{VERB-PHRASE}\rangle & \longrightarrow & \langle\text{CMPLX-VERB}\rangle \mid \langle\text{CMPLX-VERB}\rangle\langle\text{PREP-PHRASE}\rangle \\
\langle\text{PREP-PHRASE}\rangle & \longrightarrow & \langle\text{PREP}\rangle\langle\text{CMPLX-NOUN}\rangle \\
\langle\text{CMPLX-NOUN}\rangle & \longrightarrow & \langle\text{ARTICLE}\rangle\langle\text{NOUN}\rangle \\
\langle\text{CMPLX-VERB}\rangle & \longrightarrow & \langle\text{VERB}\rangle \mid \langle\text{VERB}\rangle\langle\text{NOUN-PHRASE}\rangle \\
\langle\text{ARTICLE}\rangle & \longrightarrow & \texttt{a} \mid \texttt{the} \\
\langle\text{NOUN}\rangle & \longrightarrow & \texttt{boy} \mid \texttt{girl} \mid \texttt{flower} \\
\langle\text{VERB}\rangle & \longrightarrow & \texttt{touches} \mid \texttt{likes} \mid \texttt{sees} \\
\langle\text{PREP}\rangle & \longrightarrow & \texttt{with}
\end{array}
$$

Ukažte, že odvození slova ‘`the girl touches the boy with the flower`’ odpovídají v této gramatice dva různé derivační stromy. Uveďte tyto stromy a odpovídající levé derivace a slovně popište, jak se budou lišit významy této věty v závislosti na použitém odvození.

Příklad 37: Uveďte bezkontextovou gramatiku, která generuje následující jazyk:

$$A = \{\texttt{a}^i\texttt{b}^j\texttt{c}^k \mid i, j, k \geq 0 \text{ a } i = j \text{ nebo } j = k\}\,.$$

Je vaše gramatika jednoznačná? Uveďte proč ano nebo proč ne.

Příklad 38: Mějme gramatiku $G = (\Pi, \Sigma, S, P)$, kde $\Pi = \{S, T, U\}$, $\Sigma = \{\texttt{0}, \texttt{\#}\}$ a kde P obsahuje následující pravidla

$$
\begin{array}{rcl}
S & \longrightarrow & TT \mid U \\
T & \longrightarrow & \texttt{0}T \mid T\texttt{0} \mid \texttt{\#} \\
U & \longrightarrow & \texttt{0}U\texttt{00} \mid \texttt{\#}
\end{array}
$$

a) Popište slovně jazyk $L(G)$.

b) Dokažte, že $L(G)$ není regulární.

Cvičení 7

Příklad 39: Uveďte zásobníkové automaty rozpoznávající následující jazyky. Abeceda je v obou případech $\{\texttt{0}, \texttt{1}\}$.

a) $\{w \mid \text{délka } w \text{ je lichá a prostřední symbol je } \texttt{0}\}$

b) $\{w \mid w \text{ obsahuje více symbolů } \texttt{1} \text{ než } \texttt{0}\}$

Příklad 40:

a) Uveďte zásobníkový automat, který rozpoznává jazyk A z příkladu 37.

b) Pokuste se navrhnout deterministický zásobníkový automat rozpoznávající tento jazyk, a případně zdůvodnit, proč to nejde.

Příklad 41: Ukažte, jak k libovolnému regulárnímu výrazu zkonstruovat ekvivalentní bezkontextovou gramatiku, tj. gramatiku generující stejný jazyk. Využijte toho, že třída regulárních jazyků je uzavřená vzhledem ke sjednocení, zřetězení i iteraci.

Uveďte, proč z této konstrukce vyplývá, že třída regulárních jazyků je obsažena ve třídě bezkontextových jazyků.

Příklad 42: Nechť C je nějaký bezkontextový jazyk a nechť R je nějaký regulární jazyk. Ukažte, že jazyk $C \cap R$ je bezkontextový.

Poznámka: Využijte toho, že každý bezkontextový jazyk je rozpoznáván nějakým zásobníkovým automatem.

Příklad 43: Předpokládejme, že máme dánu nějakou bezkontextovou gramatiku G, jejíž každé pravidlo je jednoho ze dvou následujících typů:

- Na pravé straně jsou dva neterminály (a žádné terminály), například $X \longrightarrow YZ$.
- Na pravé straně je pouze jeden terminál, například $X \longrightarrow \mathtt{a}$.

(*Poznámka:* O takové gramatice říkáme, že je v Chomského normální formě.)

Ukažte, že pro libovolné slovo $w \in L(G)$ délky n, kde $n \geq 1$, platí, že jakákoliv derivace tohoto slova v gramatice G má právě $2n-1$ kroků.

Cvičení 8

Příklad 44: Ukažte, že následující problém je rozhodnutelný:

VSTUP: Deterministický konečný automat A a regulární výraz γ.

OTÁZKA: Jsou A a γ ekvivalentní, tj. platí $L(A) = [\gamma]$?

Příklad 45: Ukažte, že následující problém je rozhodnutelný:

VSTUP: Zobecněný nedeterministický konečný automat A.

OTÁZKA: Platí $L(A) = \Sigma^*$?

Příklad 46: Ukažte, že následující problém je rozhodnutelný:

VSTUP: Regulární výraz α.

OTÁZKA: Existuje nějaké slovo $w \in [\alpha]$ takové, že $w = x\mathtt{111}y$ pro nějaká x a y?

Příklad 47: Ukažte, že následující problém je rozhodnutelný:

VSTUP: Deterministický konečný automat A.

OTÁZKA: Platí, že $w \in L(A)$ právě když $w^R \in L(A)$?

Příklad 48: Navrhněte Turingův stroj, který rozpoznává následující jazyk:

$$L = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^{2n}\mathtt{c}^{3n} \mid n \geq 1\}$$

Příklad 49: Navrhněte Turingův stroj, který řeší následující problém:

VSTUP: Slovo tvaru $x\mathtt{+}y$, kde $x, y \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^*$.

VÝSTUP: Slovo $z \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^*$ reprezentující v binárním zápise součet hodnot x a y, pokud se na ně díváme jako na binární čísla.

Cvičení 9

Příklad 50: Ukažte, že existuje polynomiální algoritmus řešící následující problém:

VSTUP: Deterministický konečný automat A.

OTÁZKA: Platí $L(A) = \Sigma^*$?

Příklad 51: Ukažte, že existuje polynomiální algoritmus řešící následující problém:

VSTUP: Bezkontextová gramatika G.

OTÁZKA: Platí $\varepsilon \in L(G)$?

Příklad 52: Ukažte, že existuje polynomiální algoritmus řešící následující problém:

VSTUP: Deterministický konečný automat A.

OTÁZKA: Je jazyk $L(A)$ nekonečný?

Příklad 53: Ukažte, že existuje polynomiální algoritmus řešící následující problém:

VSTUP: Deterministický konečný automat A a symbol $a \in \Sigma$.

OTÁZKA: Platí, že jazyk $L(A)$ neobsahuje žádné slovo obsahující lichý počet symbolů a ?

Příklad 54: Ukažte, že problém, zda daná bezkontextová gramatika generuje alespoň jedno slovo z $\mathtt{1}^*$, je rozhodnutelný v polynomiálním čase. Tj. ukažte, že existuje polynomiální algoritmus řešící následující problém:

VSTUP: Bezkontextová gramatika G.

OTÁZKA: Je $\mathtt{1}^* \cap L(G) \neq \emptyset$?

Příklad 55: Ukažte, že následující problém je rozhodnutelný v polynomiálním čase:

VSTUP: Orientovaný graf G.

OTÁZKA: Je graf G silně souvislý?

Poznámka: Graf G je silně souvislý, jestliže pro libovolné dva jeho vrcholy u a v platí, že existuje (orientovaná) cesta z u do v i z v do u.

Cvičení 10

Příklad 56: Určete, které z následujících vztahů platí a které ne:

a) $2n \in O(n)$

b) $n^2 \in O(n)$

c) $n^2 \in O(n \log^2 n)$

d) $n \log n \in O(n^2)$

e) $3^n \in 2^{O(n)}$

f) $2^{2^n} \in O(2^{2^n})$

Příklad 57: Určete, které z následujících vztahů platí a které ne:

a) $n \in o(2n)$

b) $2n \in o(n^2)$

c) $2^n \in o(3^n)$

d) $1 \in o(n)$

e) $n \in o(\log n)$

f) $1 \in o(1/n)$

Příklad 58: Nechť $f(n)$ a $g(n)$ jsou funkce z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}^+$, kde $\mathbb{R}^+$ označuje množinu nezáporných reálných čísel. Použitím základních definic dokažte, že $\max(f(n), g(n)) = \Theta(f(n) + g(n))$.

Příklad 59: Dokažte, že:

a) $n! \in \omega(2^n)$

b) $n! \in o(n^n)$

c) $\log_2(n!) \in \Theta(n \log n)$

Příklad 60: Nechť $f(n)$ a $g(n)$ jsou funkce z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}^+$, kde $\mathbb{R}^+$ označuje množinu nezáporných reálných čísel. Dokažte nebo vyvraťte následující tvrzení:

a) Z $f(n) \in O(g(n))$ plyne $g(n) \in O(f(n))$.

b) $f(n) + g(n) \in \Theta(\min(f(n), g(n)))$.

c) Z $f(n) \in O(g(n))$ plyne $2^{f(n)} \in O(2^{g(n)})$.

Příklad 61: Nechť $f(n)$ a $g(n)$ jsou funkce z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}^+$, kde $\mathbb{R}^+$ označuje množinu nezáporných reálných čísel. Dokažte nebo vyvraťte následující tvrzení:

a) $f(n) \in O((f(n))^2)$.

b) Z $f(n) \in O(g(n))$ plyne $g(n) \in \Omega(f(n))$.

c) $f(n) + o(f(n)) \in \Theta(f(n))$.

Příklad 62: Co nejpřesněji odhadněte, jak rychle rostou následující rekurentně definované funkce:

a) $T(n) = 4T(n/2) + n$

b) $T(n) = 4T(n/2) + n^2$

c) $T(n) = 4T(n/2) + n^3$

d) $T(n) = 9T(n/3) + n$

e) $T(n) = T(2n/3) + 1$

f) $T(n) = 3T(n/4) + n \log_2 n$

Cvičení 11

Příklad 63: Na libovolný rozhodovací problém můžeme pohlížet jako na jazyk, do kterého patří ta slova, která jsou zápisem instancí, pro něž je odpověď ANO. Díky tomu se na třídu PTIME můžeme dívat jako na třídu jazyků.

Ukažte, že tato třída je uzavřená vzhledem k operacím sjednocení, zřetězení a doplňku.

Poznámka: Předpokládejte, že vstupy všech problémů jsou kódovány jako slova v abecedě $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$.

Příklad 64: Na libovolný rozhodovací problém můžeme pohlížet jako na jazyk, do kterého patří ta slova, která jsou zápisem instancí, pro něž je odpověď ANO. Díky tomu se na třídu NP můžeme dívat jako na třídu jazyků.

Ukažte, že tato třída je uzavřená vzhledem k operacím sjednocení, zřetězení a iterace.

Poznámka: Předpokládejte, že vstupy všech problémů jsou kódovány jako slova v abecedě $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$.

Příklad 65: Ukažte, že následující problém patří do třídy NP:

VSTUP: Dva neorientované grafy G a H.

OTÁZKA: Jsou grafy G a H isomorfní?

Příklad 66:

a) Ukažte, že pokud platí $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$, pak každý netriviální problém $P \in \mathsf{P}$ je NP-úplný.

Poznámka: Problém je netriviální, pokud existuje alespoň jeden vstup, pro nějž je odpověď ANO, a současně existuje alespoň jeden vstup, pro nějž je odpověď NE.

b) Najděte chybu v následujícím chybném „důkazu“ toho, že $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$:

DŮKAZ: Uvažujme následující algoritmus řešící problém SAT: „Pro danou formuli φ postupně vyzkoušej všechna možná ohodnocení jejích proměnných. Dej odpověď ANO pokud formule nabývá hodnoty TRUE pro alespoň jedno z těchto ohodnocení, jinak dej odpověď NE.“ Tento algoritmus zjevně běží v exponenciálním čase, takže SAT má exponenciální časovou složitost, a tedy SAT $\notin \mathsf{P}$. Vzhledem k tomu, že SAT $\in \mathsf{NP}$, musí platit $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$.

Příklad 67: Ukažte, že následující problém je NP-úplný:

VSTUP: Booleovská formule φ.

OTÁZKA: Existují alespoň dvě (různá) ohodnocení booleovských proměnných vyskytujících se ve φ, při kterých nabývá formule φ hodnoty TRUE?

Příklad 68: Ukažte, že pokud $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$, pak existuje polynomiální algoritmus, který pro danou splnitelnou booleovskou formuli φ nalezne ohodnocení, při kterém je formule splněna, tj. algoritmus řešící následující problém:

VSTUP: Booleovská formule φ.

VÝSTUP:

- Slovo 'NESPLNITELNÁ', pokud φ není splnitelná.
- Nějaké ohodnocení, při kterém φ nabývá hodnoty TRUE, pokud φ je splnitelná.

Poznámka: Všimněte si, že existence tohoto algoritmu neplyne přímo z rovnosti $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$, protože třída NP obsahuje pouze rozhodovací problémy a výše uvedený problém není rozhodovací.

Příklad 69: Ukažte, že následující problém patří do třídy PTIME:

VSTUP: Booleovská formule φ v konjunktivní normální formě taková, že každá klauzule obsahuje nejvýše jeden pozitivní literál (přičemž může obsahovat libovolný počet negativních literálů).

OTÁZKA: Je formule φ splnitelná?

Poznámka: Literál je pozitivní, jestliže je tvaru x, a negativní, jestliže je tvaru $\neg x$.

Příklad 70: Ukažte, kde je chyba v následujícím „důkazu" toho, že existuje polynomiální algoritmus, který řeší problém SAT:

DŮKAZ: Zjevně platí, že booleovská formule v disjunktivní normální formě je splnitelná právě tehdy, jestliže obsahuje alespoň jednu klauzuli, ve které se nevyskytují současně literály x a $\neg x$ pro žádnou proměnnou x. Rovněž je dobře známo, že každou formuli v konjunktivní normální formě lze převést na ekvivalentní formuli v disjunktivní normální formě.

Polynomiální algoritmus řešící problém SAT vypadá takto: Vezmi formuli φ v konjunktivní normální formě, sestroj k ní ekvivalentní formuli φ' v disjunktivní normální formě a pak ověř, zda má φ' výše uvedenou vlastnost. Tento algoritmus je zjevně polynomiální.