

## Cvičení 10

**Příklad 1:** Problém *nezávislé množiny* se ptá, zda v grafu existuje podmnožina  $k$  vrcholů nespojených žádnými hranami. Problém *vrcholového pokrytí* se ptá, zda v grafu existuje podmnožina  $m$  vrcholů dotýkajících se všech hran. (Vrchol se dotýká hrany, pokud je jejím koncem.) Ukažte podrobně, jak se problém *nezávislé množiny* polynomiálně převede na problém *vrcholového pokrytí*.

**Příklad 2:** Problém *dominující množiny* se ptá, zda v grafu existuje podmnožina  $m$  vrcholů taková, že každý jiný vrchol je s některým z nich spojený hranou. Ukažte podrobně, jak se problém *vrcholového pokrytí* polynomiálně převede na problém *dominující množiny* na souvislých grafech.

**Příklad 3:** Hamiltonovská kružnice v grafu  $G$  je takový podgraf, který je isomorfní kružnici a přitom obsahuje všechny vrcholy  $G$ . (Jinak řečeno, kružnice procházející každým vrcholem jednou.) Proč patří do třídy NP problém poznat, zda daný graf  $G$  obsahuje Hamiltonovskou kružnici?

**Příklad 4:** Patří do třídy NP problém poznat, zda daný graf  $G$  obsahuje nejvýše čtyři Hamiltonovské kružnice?

**Příklad 5:** Rozhodněte, které z následujících problémů patří do třídy P všech efektivně řešitelných problémů.

- Problém rozhodnout, zda daný graf obsahuje nezávislou množinu (tj. podmnožinu vrcholů nespojených hranami) velikosti 7.
- Problém rozhodnout, zda daný graf obsahuje nezávislou množinu (tj. podmnožinu vrcholů nespojených hranami) velikosti nejméně 2005.
- Problém rozhodnout, zda daný graf má barevnost nejméně tři.
- Problém rozhodnout, zda daný graf má barevnost nejvýše tři.
- Problém rozhodnout, zda daný graf má barevnost přesně tři.
- Problém rozhodnout, zda daný graf má barevnost přesně dva.

**Příklad 6:** Analogicky k Příkladu 1 ukažte převod problému *vrcholového pokrytí* na *nezávislou množinu*. (Tj. opačný směr.)

**Příklad 7:** Párováním v grafu rozumíme podmnožinu hran, které nesdílejí žádný svůj koncový vrchol. Jak byste polynomiálně převedli problém nalezení párování velikosti  $p$  v grafu  $G$  na problém *nezávislé množiny*?

**\*Příklad 8:** Dokážete najít převod problému dominující množiny na vrcholové pokrytí? (Tj. opačný směr k Příkladu 2.)

**Příklad 9:** Patří do třídy NP problém zjistit, zda graf  $G$  obsahuje dvě Hamiltonovské kružnice, které nesdílí žádnou hranu?

**Příklad 10:** Patří do třídy NP problém zjistit, jaká je barevnost grafu?

**Příklad 11:** Patří do třídy NP problém zjistit, zda graf  $G$  je rovinný? A co třeba negace tohoto problému?

**\*Příklad 12:** Patří do třídy NP problém zjistit, zda graf  $G$  obsahuje právě jedinou Hamiltonovskou kružnici? A co třeba negace tohoto problému?

**\*Příklad 13:** Je známo, že do třídy NP patří problém  $k$ -obarvení (zda graf lze obarvit korektně  $k$  barvami, tj. zda barevnost je  $\leq k$ ) pro všechna  $k$ . Patří ale do třídy NP problém zjistit, zda graf  $G$  má barevnost právě  $k$ ? Pro která  $k$ ?

**Příklad 14:** Rozhodněte, které z následujících problémů patří do třídy NP:

- a) Problém rozhodnout, zda daný graf má barevnost nejvýše čtyři.
- b) Problém rozhodnout, zda daný graf má barevnost přesně čtyři.
- c) Problém rozhodnout, zda daný graf má barevnost nejméně čtyři.
- d) Problém rozhodnout, zda daný graf obsahuje nejméně tři Hamiltonovské kružnice.
- e) Problém rozhodnout, zda daný graf obsahuje přesně tři Hamiltonovské kružnice.