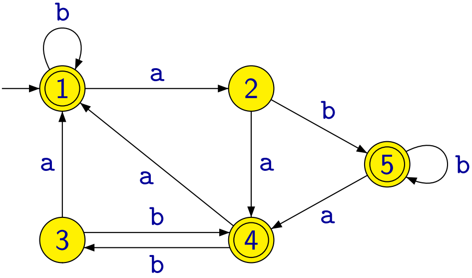
Konečné automaty

Deterministický konečný automat



Deterministický konečný automat se skládá ze **stavů** a **přechodů**. Jeden ze stavů je označen jako **počáteční stav** a některé ze stavů jsou označeny jako přijímající.

Deterministický konečný automat

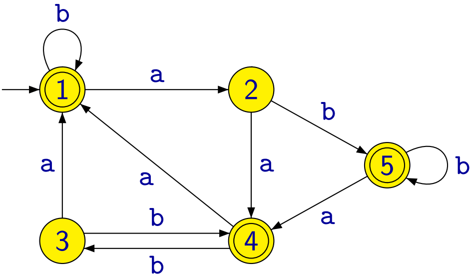
Formálně je **deterministický konečný automat** definován jako pětice

$$(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

kde:

- Q je konečná množina **stavů**
- Σ je konečná **abeceda**
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ je **přechodová funkce**
- $q_0 \in Q$ je **počáteční stav**
- $F \subseteq Q$ je množina **přijímajících stavů**

Deterministický konečný automat



- $Q = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$
- $q_0 = 1$
- $F = \{1, 4, 5\}$

$$\begin{array}{ll}
\delta(1, \mathtt{a}) = 2 & \delta(1, \mathtt{b}) = 1 \\
\delta(2, \mathtt{a}) = 4 & \delta(2, \mathtt{b}) = 5 \\
\delta(3, \mathtt{a}) = 1 & \delta(3, \mathtt{b}) = 4 \\
\delta(4, \mathtt{a}) = 1 & \delta(4, \mathtt{b}) = 3 \\
\delta(5, \mathtt{a}) = 4 & \delta(5, \mathtt{b}) = 5
\end{array}$$

Místo zápisu

$$\begin{array}{ll}
\delta(1,\mathtt{a}) = 2 & \delta(1,\mathtt{b}) = 1 \\
\delta(2,\mathtt{a}) = 4 & \delta(2,\mathtt{b}) = 5 \\
\delta(3,\mathtt{a}) = 1 & \delta(3,\mathtt{b}) = 4 \\
\delta(4,\mathtt{a}) = 1 & \delta(4,\mathtt{b}) = 3 \\
\delta(5,\mathtt{a}) = 4 & \delta(5,\mathtt{b}) = 5
\end{array}$$

budeme raději používat stručnější tabulku nebo grafické znázornění:

δ	a	b
1	2	1
2	4	5
3	1	4
4	1	3
5	4	5

Deterministický konečný automat

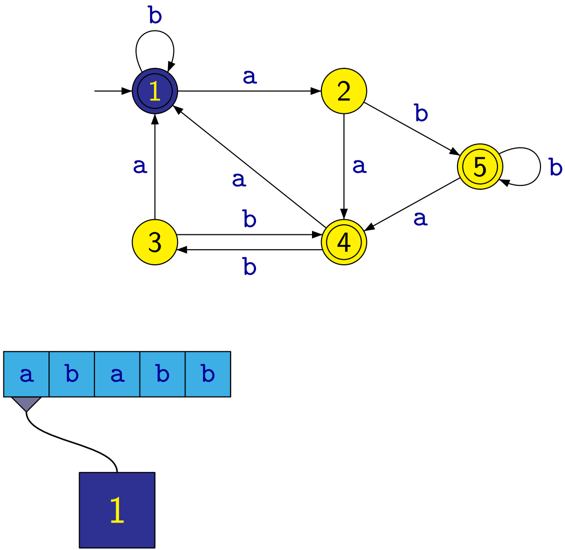
Místo zápisu

$$
\begin{array}{ll}
\delta(1,\mathtt{a}) = 2 & \delta(1,\mathtt{b}) = 1 \\
\delta(2,\mathtt{a}) = 4 & \delta(2,\mathtt{b}) = 5 \\
\delta(3,\mathtt{a}) = 1 & \delta(3,\mathtt{b}) = 4 \\
\delta(4,\mathtt{a}) = 1 & \delta(4,\mathtt{b}) = 3 \\
\delta(5,\mathtt{a}) = 4 & \delta(5,\mathtt{b}) = 5
\end{array}
$$

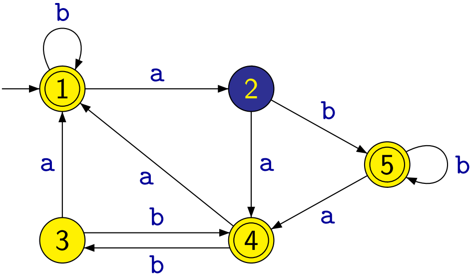
budeme raději používat stručnější tabulku nebo grafické znázornění:

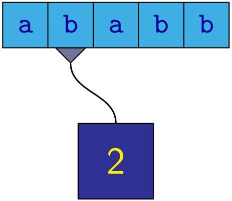
δ	a	b
$\leftrightarrow 1$	2	1
2	4	5
3	1	4
$\leftarrow 4$	1	3
$\leftarrow 5$	4	5

Deterministický konečný automat

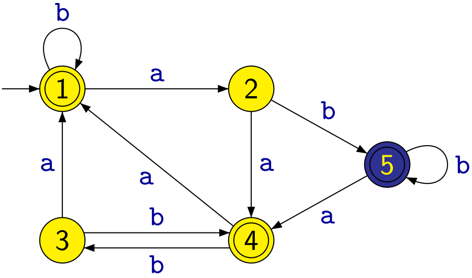


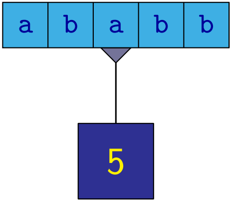
Deterministický konečný automat



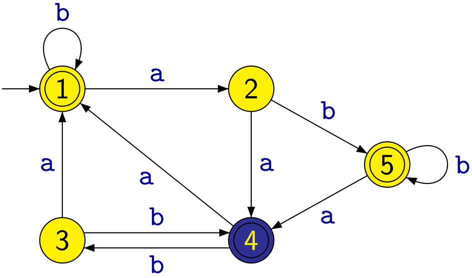


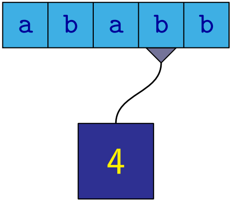
Deterministický konečný automat



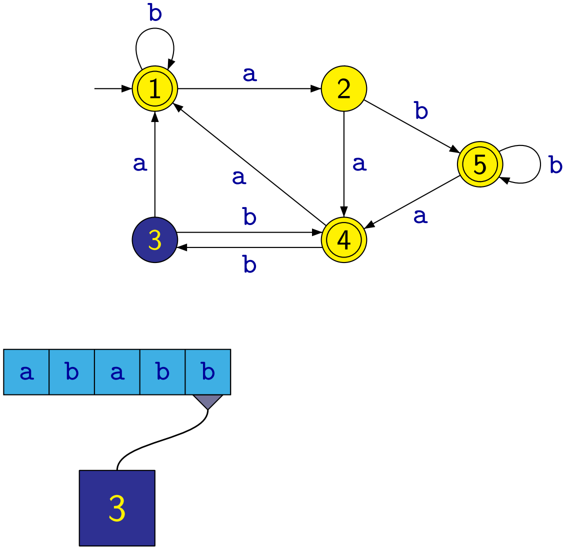


Deterministický konečný automat

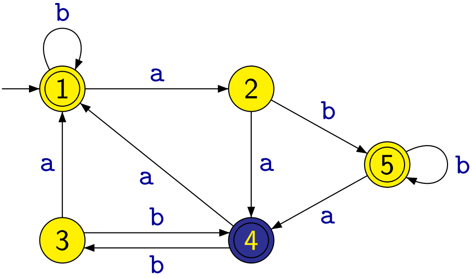


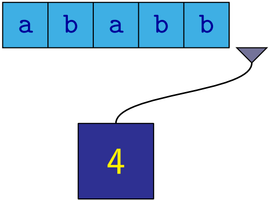


Deterministický konečný automat



Deterministický konečný automat





Deterministický konečný automat

Konfigurace konečného automatu je dána stavem jeho řídící jednotky a dosud nepřečteným obsahem pásky.

Formálně můžeme konfiguraci definovat jako dvojici z množiny $Q \times \Sigma^*$.

Příklad: $(2, \mathtt{babb})$ je konfigurace

Na množině všech konfigurací můžeme definovat binární relaci $\vdash$ s následujícím významem: $C_1 \vdash C_2$ znamená, že automat může přejít jedním krokem z konfigurace C_1 do konfigurace C_2.

Příklad:

$$(2, \mathtt{babb}) \vdash (5, \mathtt{abb})$$

Formálně platí, že $(q, w) \vdash (q', w')$ právě když $w = aw'$ a $q' = \delta(q, a)$ pro nějaké $a \in \Sigma$.

Deterministický konečný automat

Konfigurace (q, w) se nazývá **počáteční konfigurace**, jestliže $q = q_0$.
Příklad: $(1, \mathtt{ababb})$ je počáteční konfigurace.

Konfigurace (q, w) se nazývá **koncová konfigurace**, jestliže $w = \varepsilon$.
Příklad: $(4, \varepsilon)$ je koncová konfigurace.

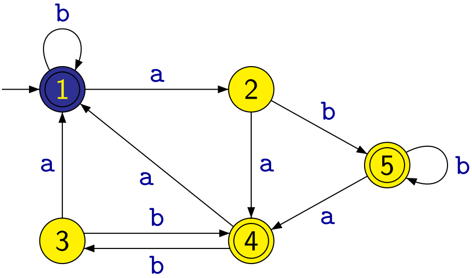
Definice

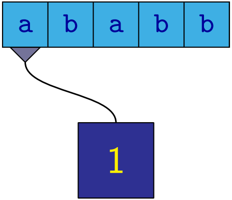
Výpočet automatu je posloupnost konfigurací

$$C_0, C_1, C_2, \cdots, C_k$$

kde C_i jsou konfigurace, C_0 je počáteční konfigurace, C_k je koncová konfigurace a pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ platí, že $C_{i-1} \vdash C_i$.

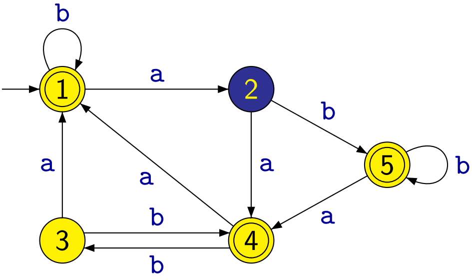
Deterministický konečný automat

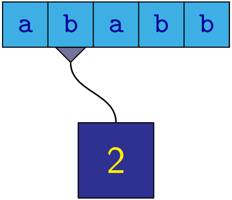




$(1, \mathtt{ababb})$

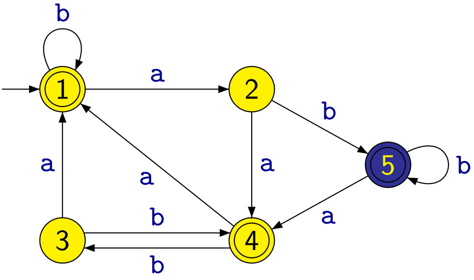
Deterministický konečný automat

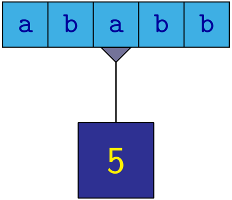




$$(1, \texttt{ababb}) \vdash (2, \texttt{babb})$$

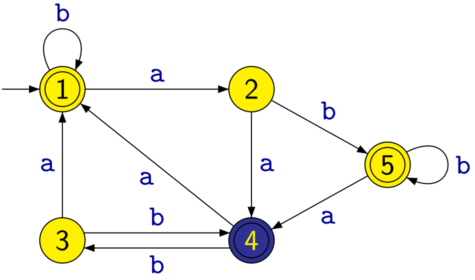
Deterministický konečný automat

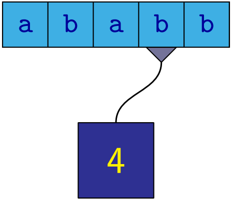




$(1, \mathtt{ababb}) \vdash (2, \mathtt{babb}) \vdash$
$(5, \mathtt{abb})$

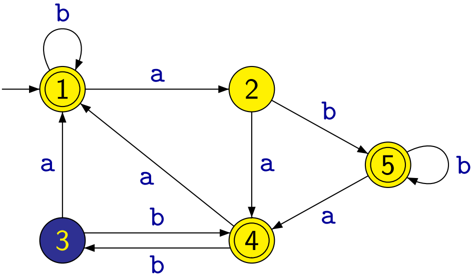
Deterministický konečný automat

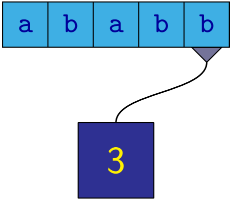




$(1, \mathtt{ababb}) \vdash (2, \mathtt{babb}) \vdash$
$(5, \mathtt{abb}) \vdash (4, \mathtt{bb})$

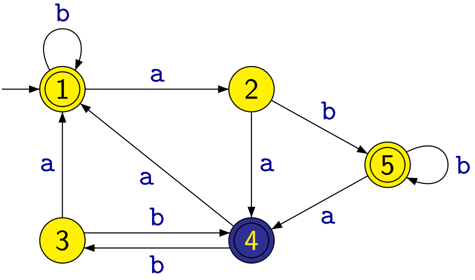
Deterministický konečný automat

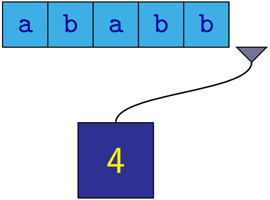




$(1, \mathtt{ababb}) \vdash (2, \mathtt{babb}) \vdash$
$(5, \mathtt{abb}) \vdash (4, \mathtt{bb}) \vdash$
$(3, \mathtt{b})$

Deterministický konečný automat





$(1, \mathtt{ababb}) \vdash (2, \mathtt{babb}) \vdash$
$(5, \mathtt{abb}) \vdash (4, \mathtt{bb}) \vdash$
$(3, \mathtt{b}) \vdash (4, \varepsilon)$

Deterministický konečný automat

Dále můžeme definovat relaci $\vdash^*$, jejíž význam je takový, že $C \vdash^* C'$ platí právě tehdy, když automat může přejít nějakým libovolným (i nulovým) počtem kroků z konfigurace C do konfigurace C'.

Přesněji řečeno, $C \vdash^* C'$ platí právě tehdy, když existuje posloupnost konfigurací

$$C_0 \vdash C_1 \vdash C_2 \vdash \cdots \vdash C_k$$

kde $C_0 = C$, $C_k = C'$ a pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ platí, že $C_{i-1} \vdash C_i$.

Deterministický konečný automat

Definice

Koncová konfigurace (q, ε) je **přijímající**, jestliže $q \in F$.

Definice

Automat **přijímá** slovo $w \in \Sigma^*$ právě tehdy, jestliže výpočet začínající v počáteční konfiguraci (q_0, w) skončí v přijímající koncové konfiguraci.

Poznámka: Formálně to můžeme definovat tak, že automat přijímá slovo $w \in \Sigma^*$ právě když $(q_0, w) \vdash^* (q, \varepsilon)$ pro nějaké $q \in F$.

Deterministický konečný automat

Definice

Jazyk rozpoznávaný (přijímaný) daným deterministickým konečným automatem $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, označovaný $L(A)$, je množina všech slov přijímaných tímto automatem, tj.

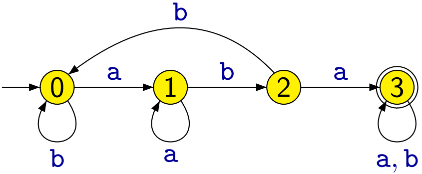
$$L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid (q_0, w) \vdash^* (q, \varepsilon), \ q \in F\}$$

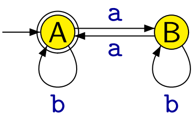
Definice

Jazyk L nazýváme **regulární** právě tehdy, když existuje konečný automat, který jej přijímá.

Automat pro průnik jazyků

Máme následující dva automaty:

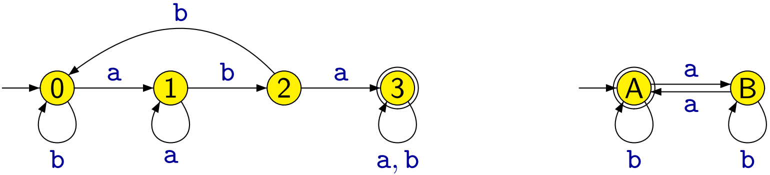




Příjmou oba slovo ababb?

Automat pro průnik jazyků

Máme následující dva automaty:

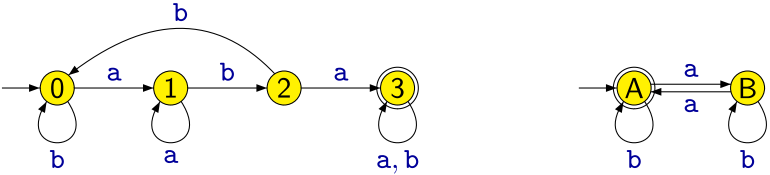


Příjmou oba slovo `ababb`?

Můžeme postupně nechat přečíst slovo oběma automatům. Odpověď bude ano, pokud oba odpoví ano.

Automat pro průnik jazyků

Máme následující dva automaty:



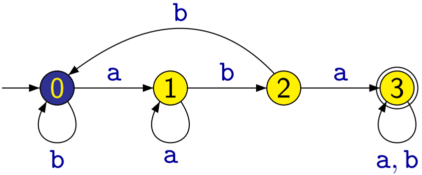
Příjmou oba slovo `ababb`?

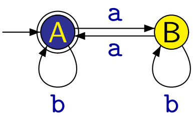
Můžeme postupně nechat přečíst slovo oběma automatům. Odpověď bude ano, pokud oba odpoví ano.

Lepší je číst slovo současně oběma automaty.

Automat pro průnik jazyků

Máme následující dva automaty:





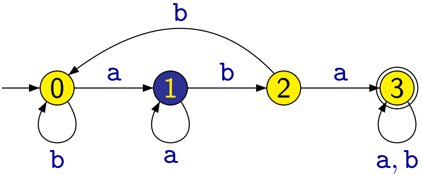
Příjmou oba slovo ababb?

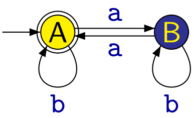
Můžeme postupně nechat přečíst slovo oběma automatům. Odpověď bude ano, pokud oba odpoví ano.

Lepší je číst slovo současně oběma automaty.

Automat pro průnik jazyků

Máme následující dva automaty:





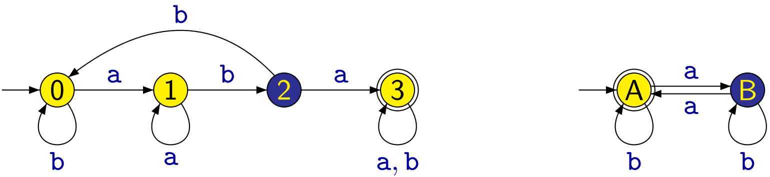
Příjmou oba slovo ababb?

Můžeme postupně nechat přečíst slovo oběma automatům. Odpověď bude ano, pokud oba odpoví ano.

Lepší je číst slovo současně oběma automaty.

Automat pro průnik jazyků

Máme následující dva automaty:

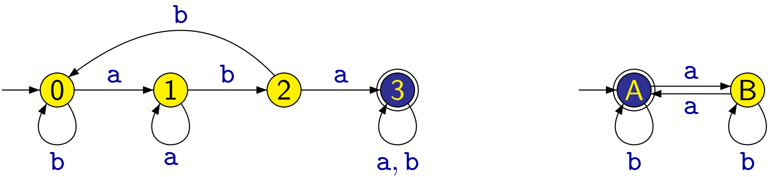


Příjmou oba slovo ababb?

Můžeme postupně nechat přečíst slovo oběma automatům. Odpověď bude ano, pokud oba odpoví ano.

Lepší je číst slovo současně oběma automaty.

Máme následující dva automaty:

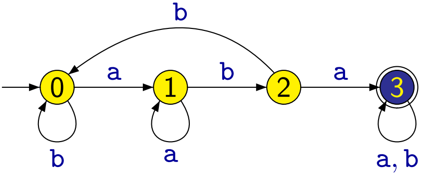


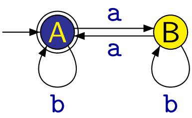
Příjmou oba slovo ababb?

Můžeme postupně nechat přečíst slovo oběma automatům. Odpověď bude ano, pokud oba odpoví ano.
Lepší je číst slovo současně oběma automaty.

Automat pro průnik jazyků

Máme následující dva automaty:





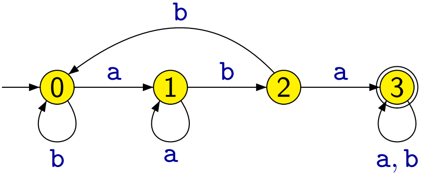
Příjmou oba slovo ababb?

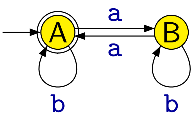
Můžeme postupně nechat přečíst slovo oběma automatům. Odpověď bude ano, pokud oba odpoví ano.

Lepší je číst slovo současně oběma automaty.

Automat pro průnik jazyků

Máme následující dva automaty:





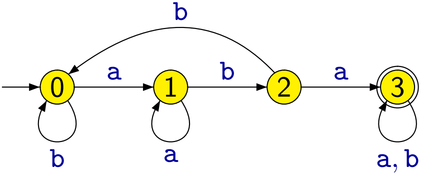
Příjmou oba slovo ababb?

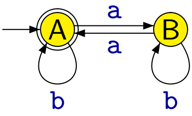
Můžeme postupně nechat přečíst slovo oběma automatům. Odpověď bude ano, pokud oba odpoví ano.

Lepší je číst slovo současně oběma automaty.

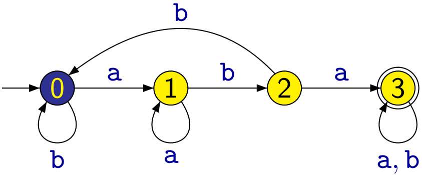
Situace při tomto postupu je dána nepřečtenou částí slova a aktuálními stavy obou automatů. Zkusíme vytvořit automat, který toto má jako své konfigurace.

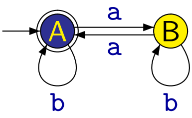
Automat pro průnik jazyků

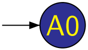




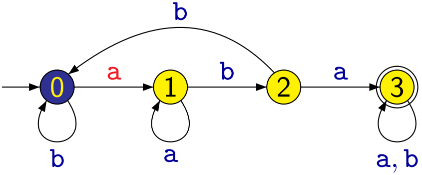
Automat pro průnik jazyků

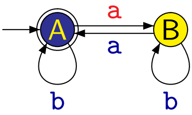


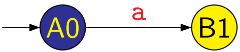




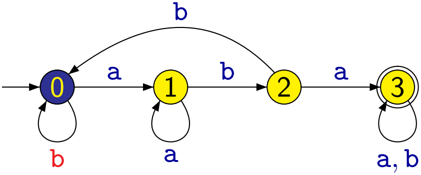
Automat pro průnik jazyků

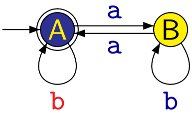


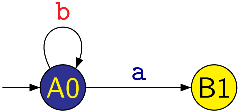




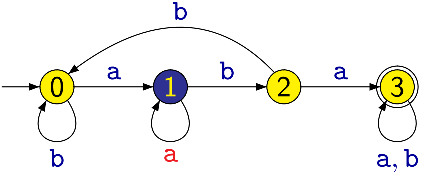
Automat pro průnik jazyků

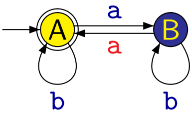


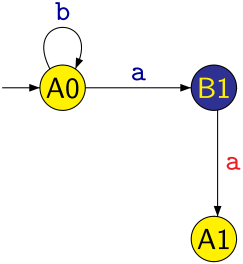




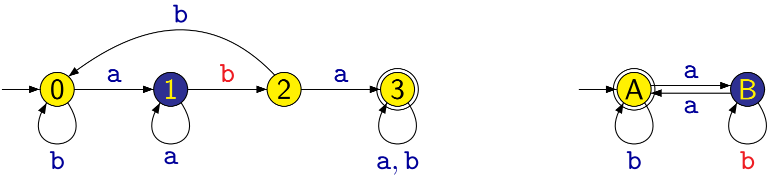
Automat pro průnik jazyků

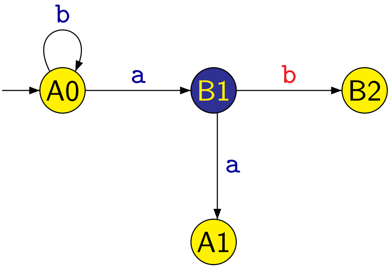




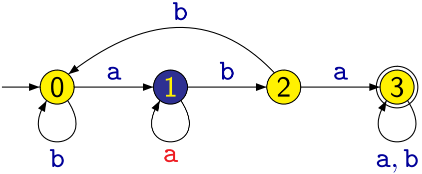


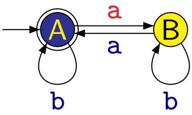
Automat pro průnik jazyků

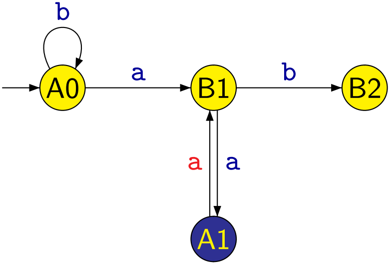




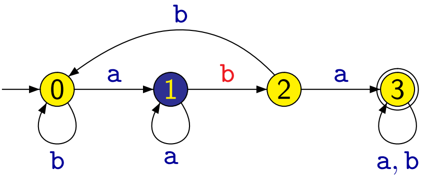
Automat pro průnik jazyků

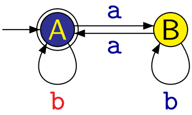


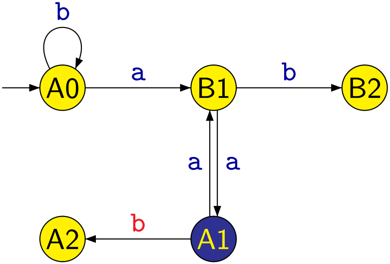




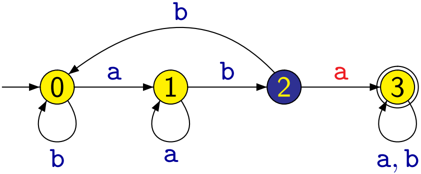
Automat pro průnik jazyků

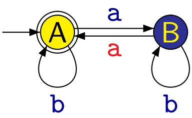


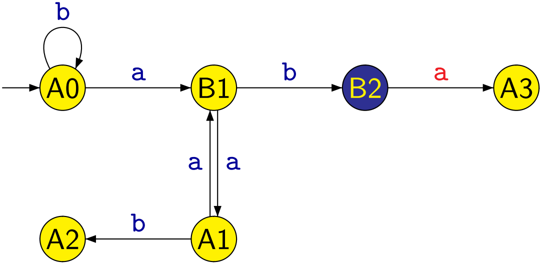




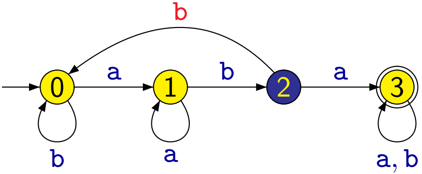
Automat pro průnik jazyků

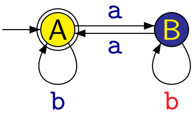


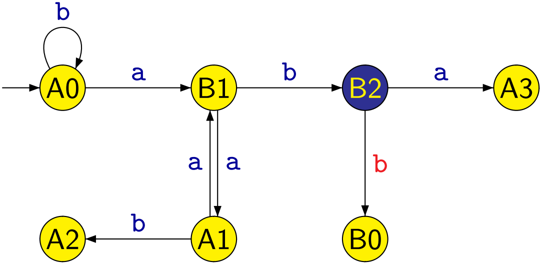




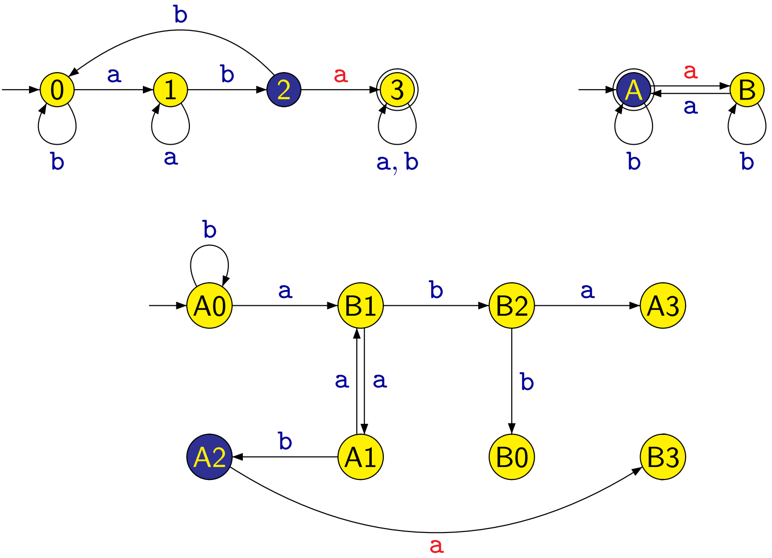
Automat pro průnik jazyků



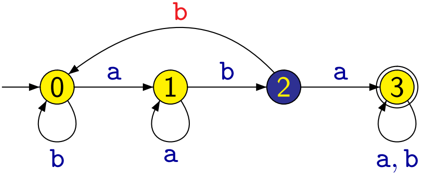


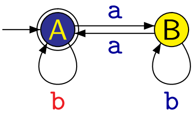


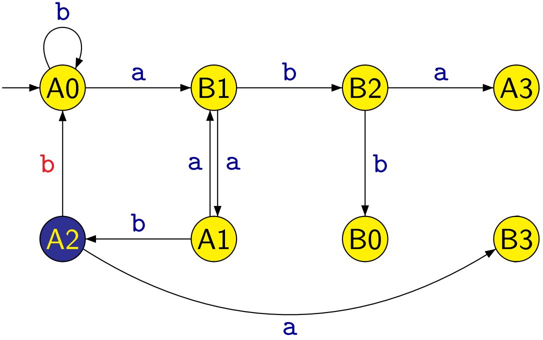
Automat pro průnik jazyků



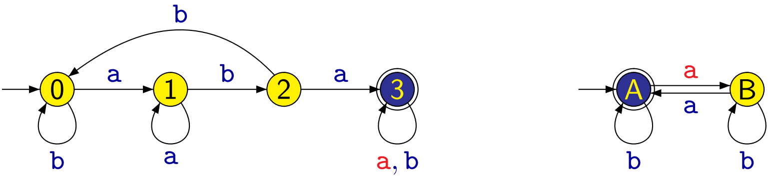
Automat pro průnik jazyků

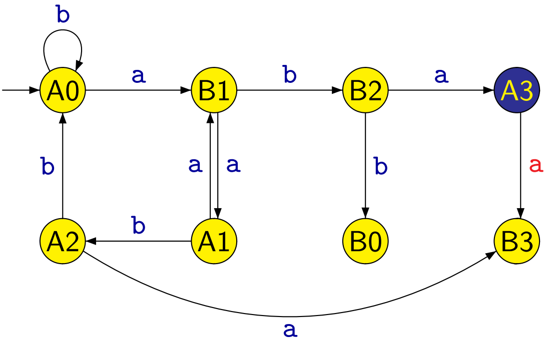




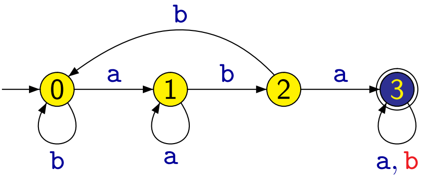


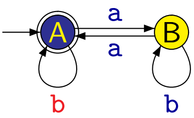
Automat pro průnik jazyků

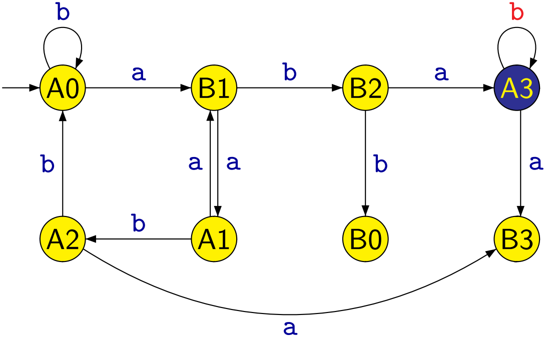




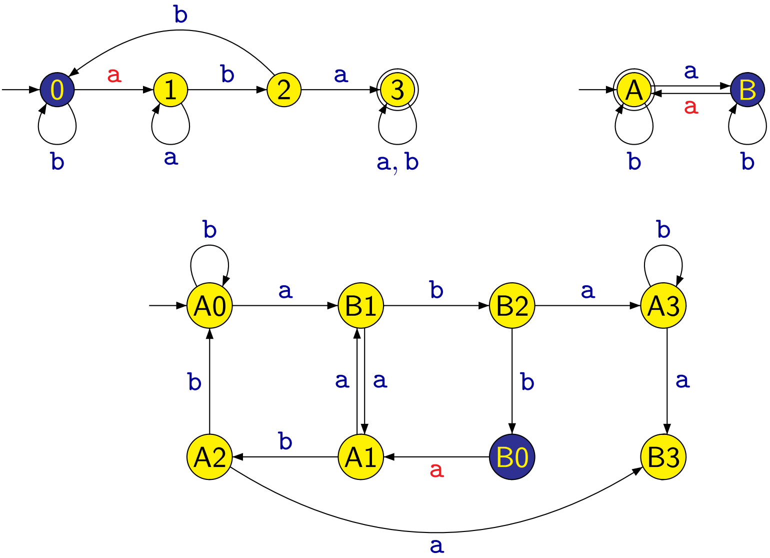
Automat pro průnik jazyků



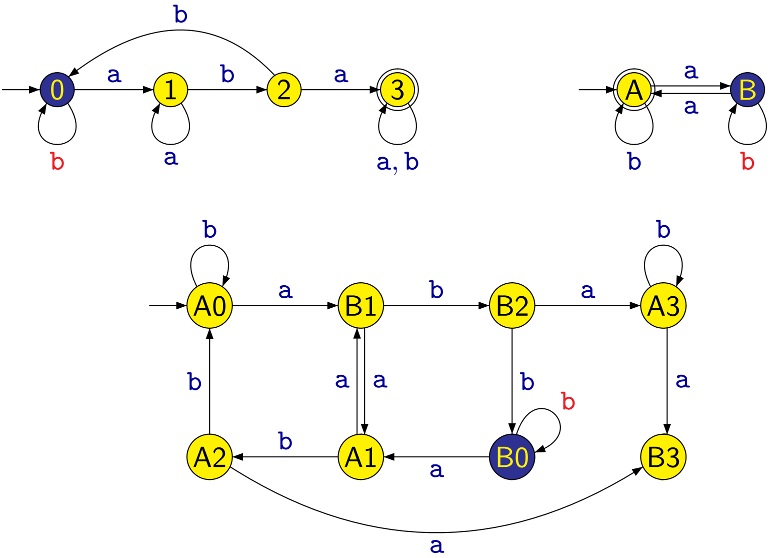




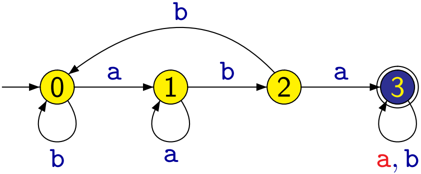
Automat pro průnik jazyků

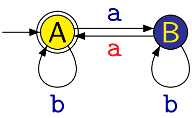


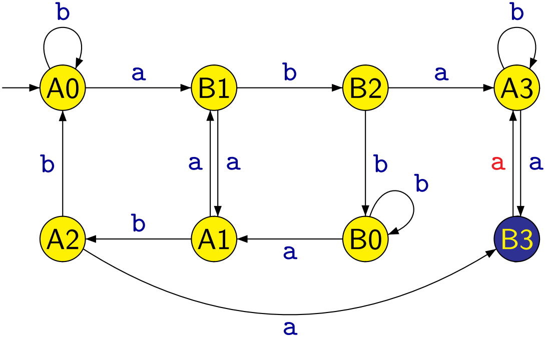
Automat pro průnik jazyků



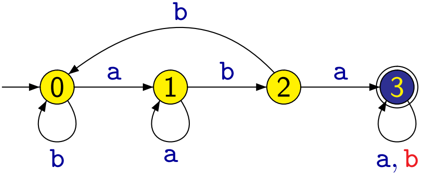
Automat pro průnik jazyků

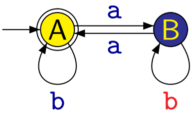


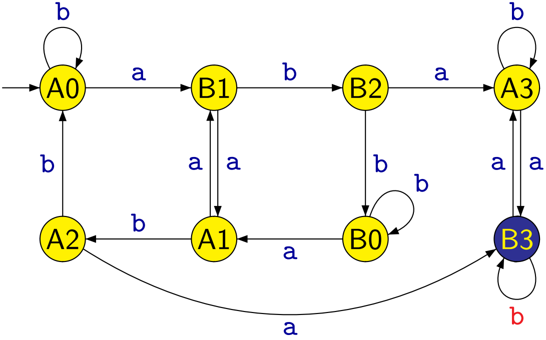




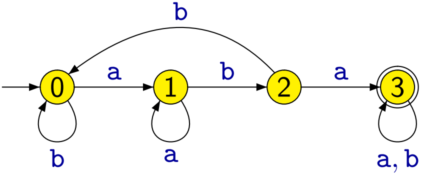
Automat pro průnik jazyků

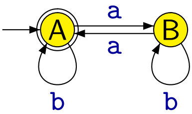


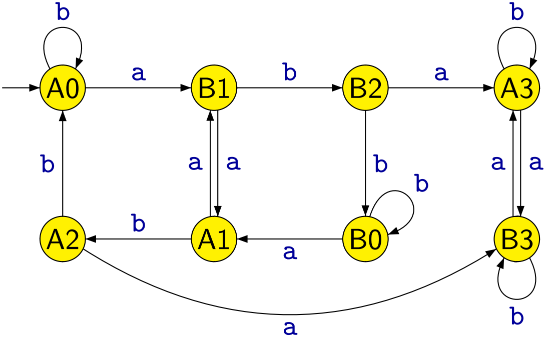




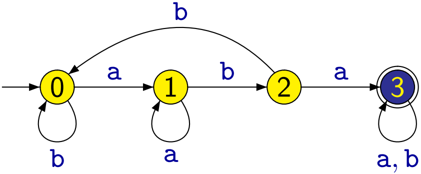
Automat pro průnik jazyků

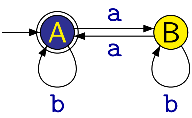


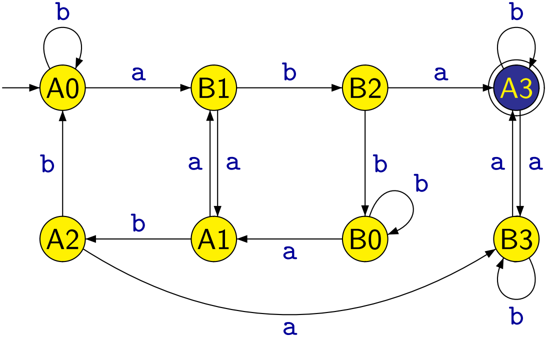




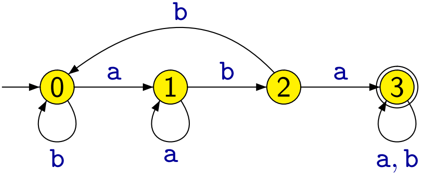
Automat pro průnik jazyků

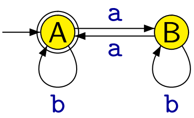


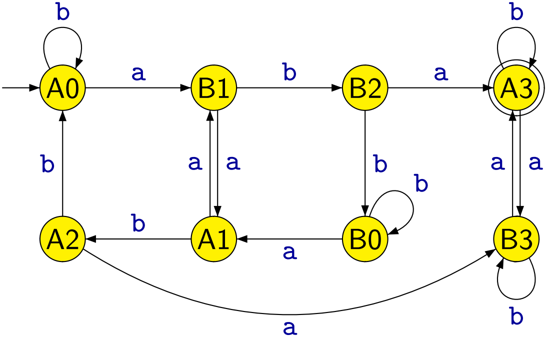




Automat pro průnik jazyků







Průnik regulárních jazyků

Věta

Jestliže jazyky $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ jsou regulární, pak také jazyk $L_1 \cap L_2$ je regulární.

Průnik regulárních jazyků

Věta

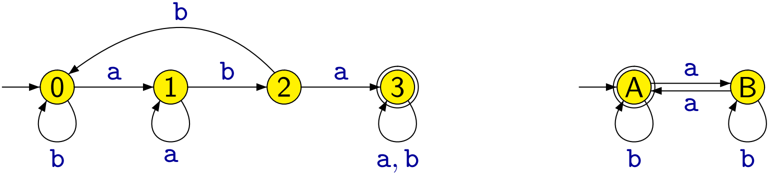
Jestliže jazyky $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ jsou regulární, pak také jazyk $L_1 \cap L_2$ je regulární.

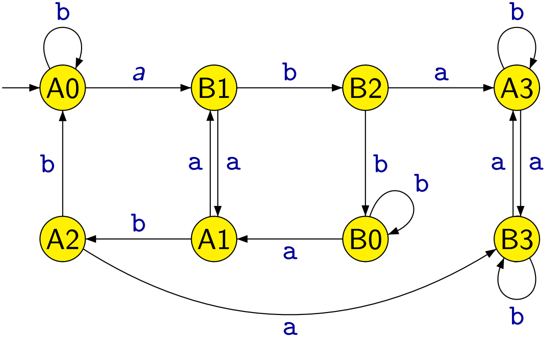
Důkaz: Nechť $L_1 = L(\mathcal{A}_1)$, $L_2 = L(\mathcal{A}_2)$ pro konečné automaty $\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_{01}, F_1)$, $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_{02}, F_2)$. Definujeme automat $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tž.

- $Q = Q_1 \times Q_2$,
- $\delta(\,(q_1, q_2), a\,) = (\,\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a)\,)$ pro všechna $q_1 \in Q_1$, $q_2 \in Q_2$, $a \in \Sigma$,
- $q_0 = (q_{01}, q_{02})$,
- $F = (F_1 \times F_2)$.

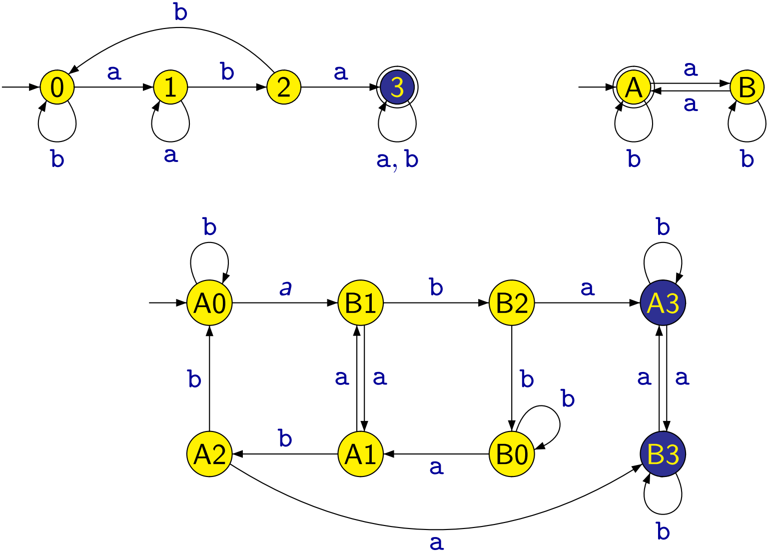
Od konstrukce pro sjednocení se tato liší jen množinou koncových stavů v sestrojeném automatu.

Automat pro sjednocení jazyků

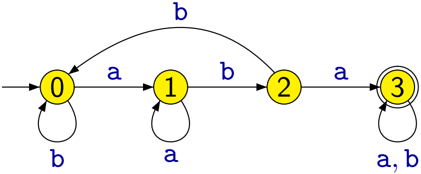


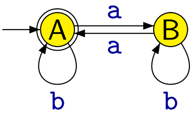


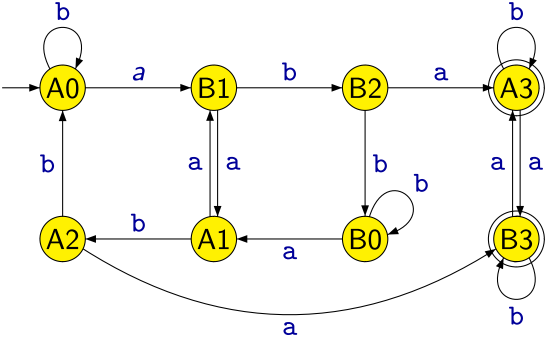
Automat pro sjednocení jazyků



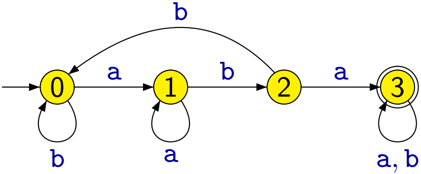
Automat pro sjednocení jazyků

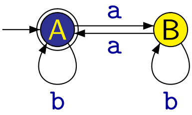


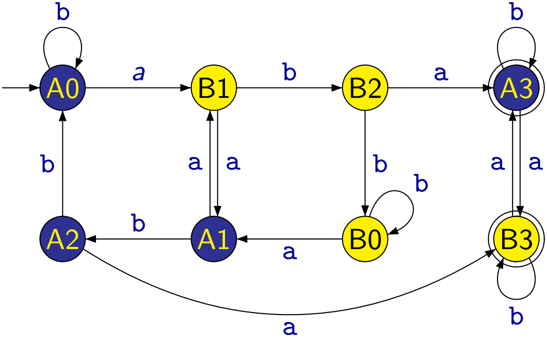




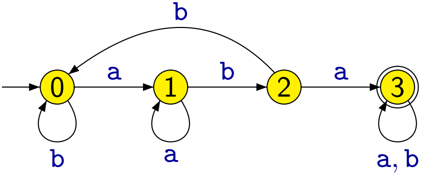
Automat pro sjednocení jazyků

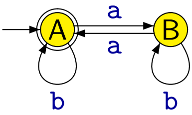


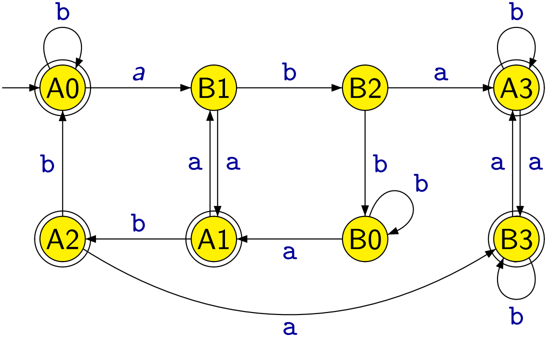




Automat pro sjednocení jazyků







Sjednocení regulárních jazyků

Věta

Jestliže jazyky $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ jsou regulární, pak také jazyk $L_1 \cup L_2$ je regulární.

Sjednocení regulárních jazyků

Věta

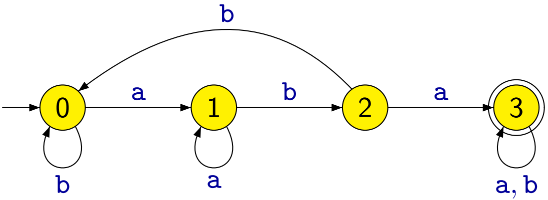
Jestliže jazyky $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ jsou regulární, pak také jazyk $L_1 \cup L_2$ je regulární.

Důkaz: Nechť $L_1 = L(\mathcal{A}_1)$, $L_2 = L(\mathcal{A}_2)$ pro konečné automaty $\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_{01}, F_1)$, $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_{02}, F_2)$. Definujeme automat $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tž.

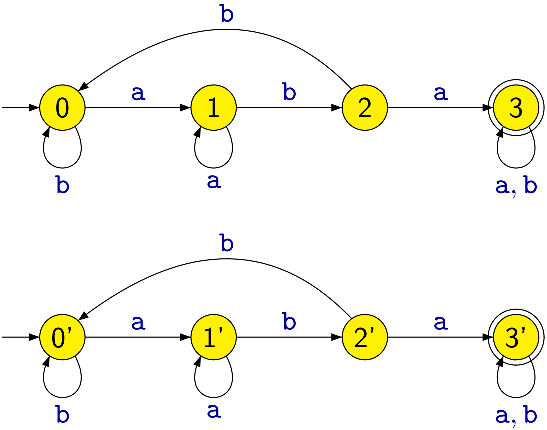
- $Q = Q_1 \times Q_2$,
- $\delta(\,(q_1, q_2), a\,) = (\,\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a)\,)$ pro všechna $q_1 \in Q_1$, $q_2 \in Q_2$, $a \in \Sigma$,
- $q_0 = (q_{01}, q_{02})$,
- $F = (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2)$.

Je zřejmé a např. indukcí podle délky $|w|$ je možno ukázat, že pro libovolné $q_1 \in Q_1$, $q_2 \in Q_2$ a $w \in \Sigma^*$ je $\delta^*(\,(q_1, q_2), w\,) = (\,\delta_1^*(q_1, w), \delta_2^*(q_2, w)\,)$.

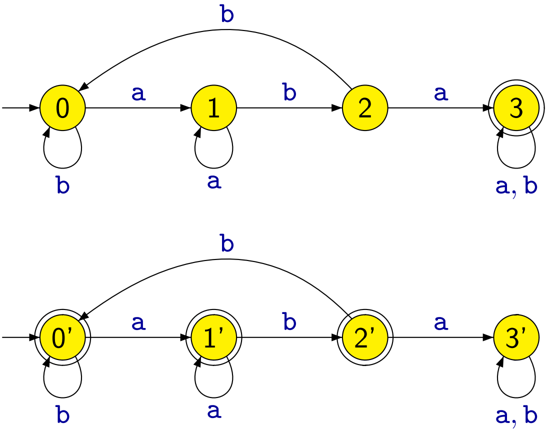
Automat pro doplněk jazyka



Automat pro doplněk jazyka



Automat pro doplněk jazyka



Doplněk regulárního jazyka

Věta

Jestliže jazyk L je regulární, pak také jeho doplněk $\overline{L}$ je regulární.

Doplněk regulárního jazyka

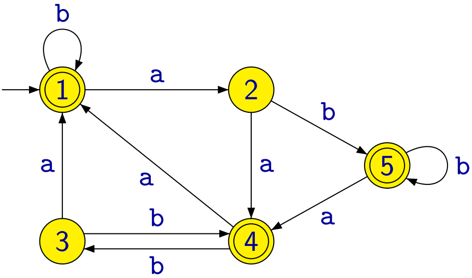
Věta

Jestliže jazyk L je regulární, pak také jeho doplněk $\overline{L}$ je regulární.

Důkaz: Nechť $L = L(\mathcal{A})$ pro konečný automat $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Definujeme automat $\mathcal{A}' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q - F)$. Potom

- pro každé slovo w přijímané $\mathcal{A}$ platí $\delta^*(q_0, w) \in F$ a tedy $\delta^*(q_0, w) \notin Q - F$
- pro každé slovo w nepřijímané $\mathcal{A}$ platí $\delta^*(q_0, w) \notin F$ a tedy $\delta^*(q_0, w) \in Q - F$
- a tedy automat $\mathcal{A}'$ přijímá právě ta slova, která nepřijímá $\mathcal{A}$

Jazyk rozpoznávaný automatem

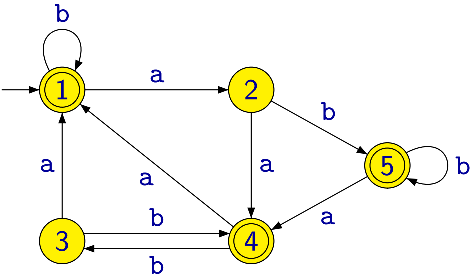


Uvažujme libovolný **tah** v grafu takový, že:

- Začíná v počátečním stavu.
- Končí v některém z přijímajících stavů.

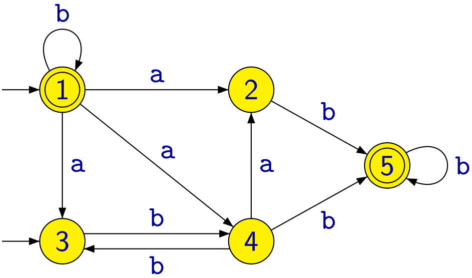
Symboly, jimiž jsou ohodnoceny hrany (tj. přechody) v tomto tahu, tvoří **slovo**, které je přijímáno daným automatem.

Jazyk rozpoznávaný automatem



Jazyk rozpoznávaný automatem je množina všech slov, pro které v grafu existuje takovýto tah.

Nedeterministický konečný automat



Je očividné, že pokud jazyk definujeme tímto způsobem, nemusíme se omezovat na grafy, kde:

- Z každého stavu vede právě jedna hrana označená daným symbolem abecedy.
- Máme právě jeden počáteční stav.

Nedeterministický konečný automat

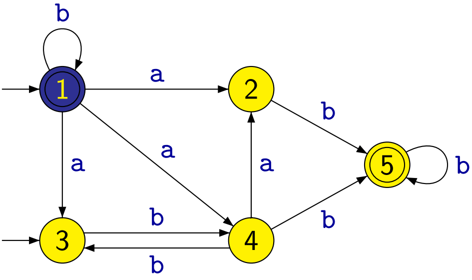
Takto obecněji definovaný automat se nazývá **nedeterministický konečný automat**.

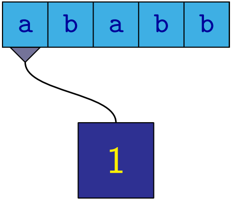
Rozdíly oproti deterministickým konečným automatům:

- Z jednoho stavu může vézt libovolný (i nulový) počet přechodů označených stejným symbolem.
- V automatu může být víc než jeden počáteční stav.

Pokud se na automat díváme jako na zařízení čtoucí slovo, vidíme, že jednomu slovu může odpovídat více než jeden výpočet (nebo naopak žádný).

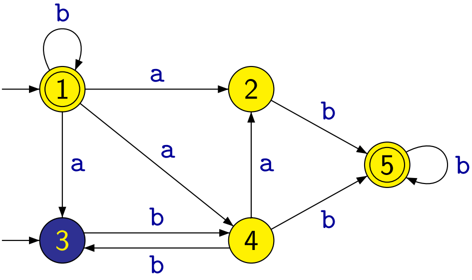
Nedeterministický konečný automat

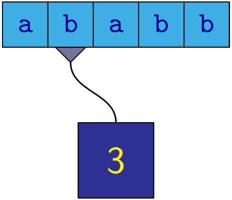




$(1, \mathtt{ababb})$

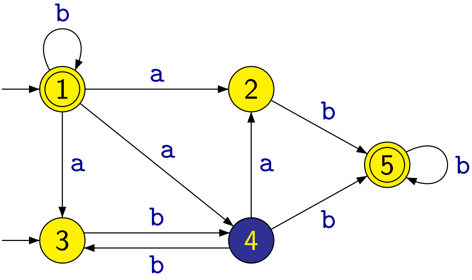
Nedeterministický konečný automat

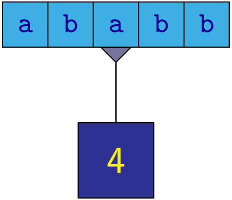




$(1, \mathtt{ababb})$
$\vdash (3, \mathtt{babb})$

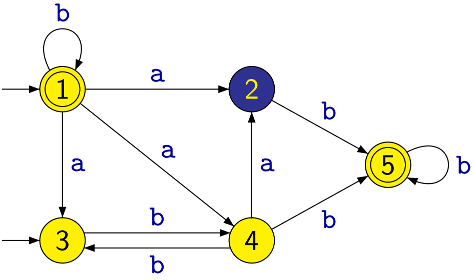
Nedeterministický konečný automat

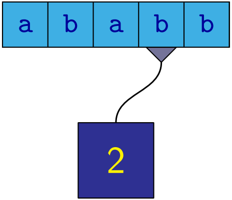




$$(1, ababb) \vdash (3, babb) \vdash (4, abb)$$

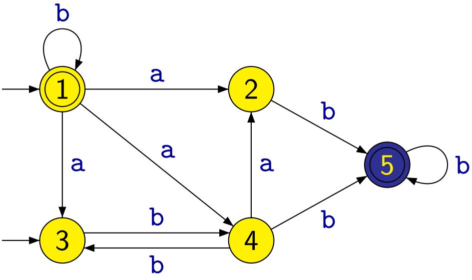
Nedeterministický konečný automat

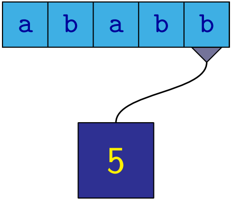




$$
\begin{aligned}
&(1, \mathtt{ababb}) \\
&\vdash (3, \mathtt{babb}) \\
&\vdash (4, \mathtt{abb}) \\
&\vdash (2, \mathtt{bb})
\end{aligned}
$$

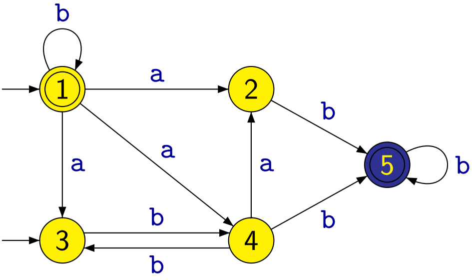
Nedeterministický konečný automat

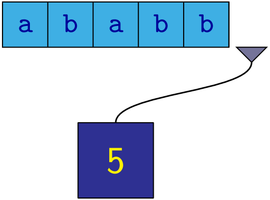




$$\begin{aligned}&(1, \mathtt{ababb})\\ &\vdash (3, \mathtt{babb})\\ &\vdash (4, \mathtt{abb})\\ &\vdash (2, \mathtt{bb})\\ &\vdash (5, \mathtt{b})\end{aligned}$$

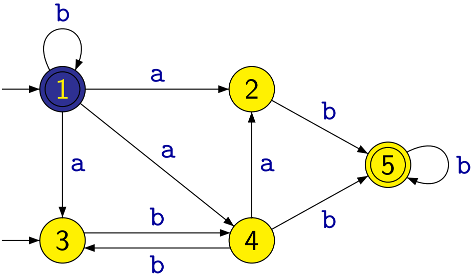
Nedeterministický konečný automat

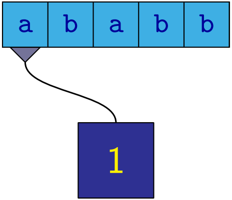




$(1, \mathtt{ababb})$
$\vdash (3, \mathtt{babb})$
$\vdash (4, \mathtt{abb})$
$\vdash (2, \mathtt{bb})$
$\vdash (5, \mathtt{b})$
$\vdash (5, \varepsilon)$

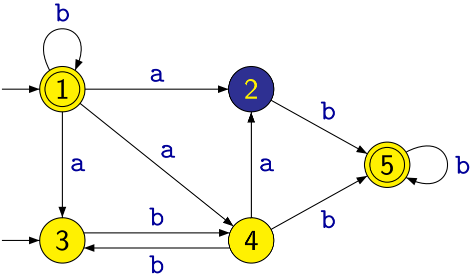
Nedeterministický konečný automat

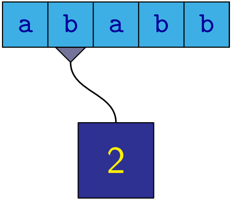




$(1, \mathtt{ababb})$

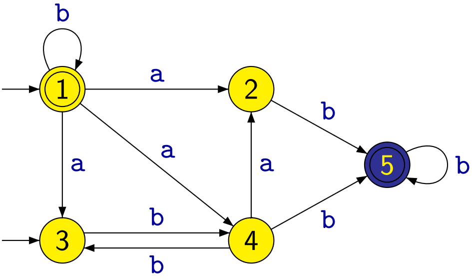
Nedeterministický konečný automat

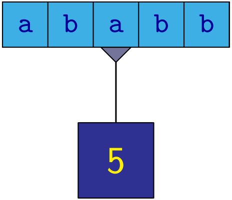




$$(1, \mathtt{ababb}) \vdash (2, \mathtt{babb})$$

Nedeterministický konečný automat

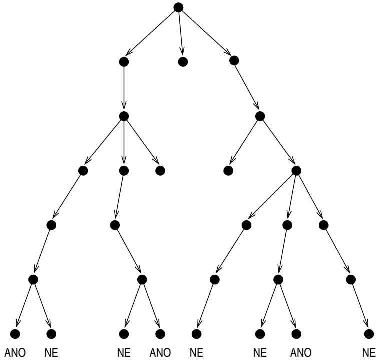




$(1, \mathtt{ababb})$
$\vdash (2, \mathtt{babb})$
$\vdash (5, \mathtt{abb})$

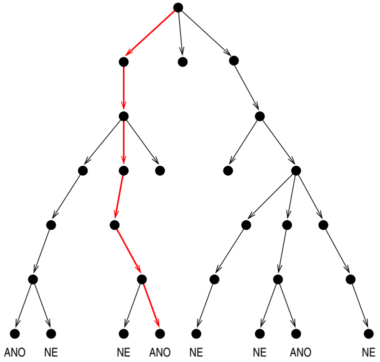
Nedeterministický konečný automat

Nedeterministický konečný automat přijímá dané slovo, jestliže **existuje** alespoň jeden jeho výpočet, který vede k přijetí tohoto slova.

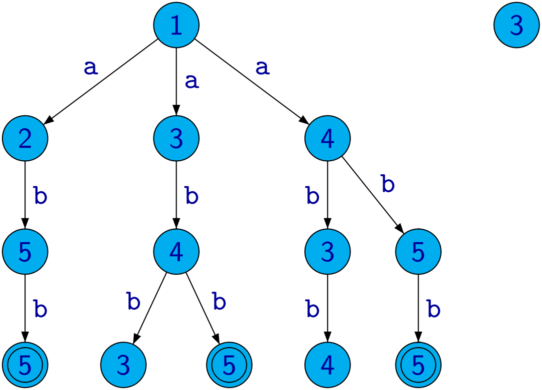


Nedeterministický konečný automat

Nedeterministický konečný automat přijímá dané slovo, jestliže **existuje** alespoň jeden jeho výpočet, který vede k přijetí tohoto slova.



	a	b
$\leftrightarrow 1$	$2, 3, 4$	1
2	$-$	5
$\rightarrow 3$	$-$	4
4	2	$3, 5$
$\leftarrow 5$	$-$	5



Příklad: Les reprezentující všechny možné výpočty nad slovem abb.

Nedeterministický konečný automat

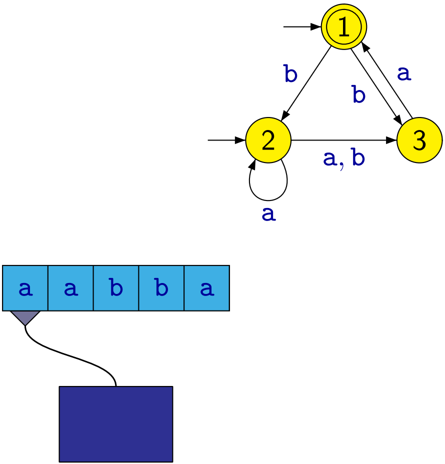
Formálně je **nedeterministický konečný automat** definován jako pětice

$$(Q, \Sigma, \delta, I, F)$$

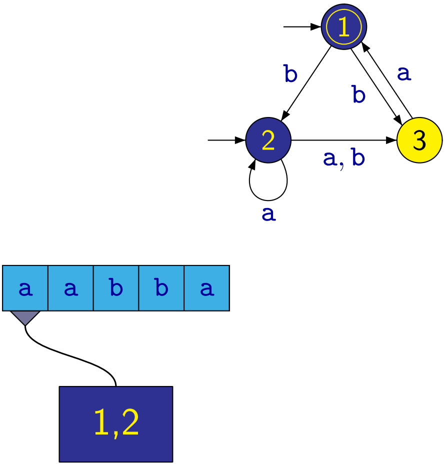
kde:

- Q je konečná množina **stavů**
- Σ je konečná **abeceda**
- $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$ je **přechodová funkce**
- $I \subseteq Q$ je množina **počátečních stavů**
- $F \subseteq Q$ je množina **přijímajících stavů**

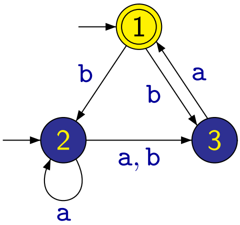
Převod nedeterministického automatu na deterministický

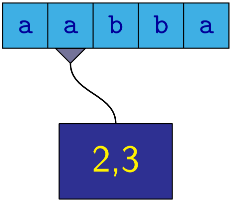


Převod nedeterministického automatu na deterministický

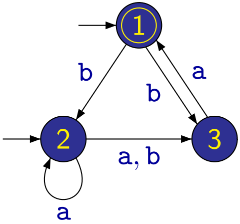


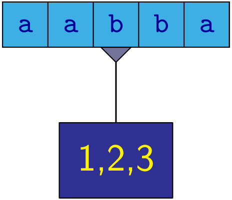
Převod nedeterministického automatu na deterministický



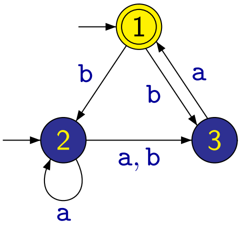


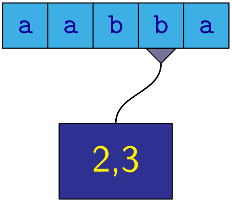
Převod nedeterministického automatu na deterministický



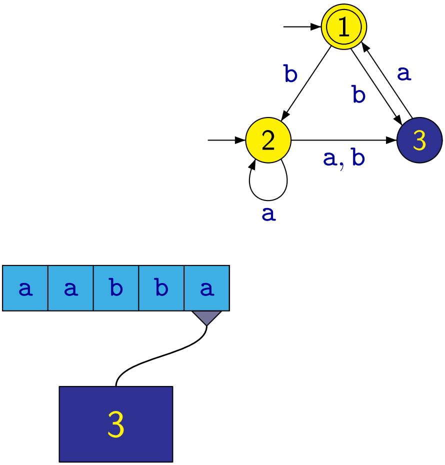


Převod nedeterministického automatu na deterministický

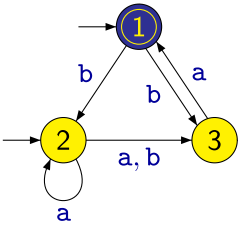


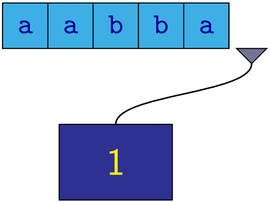


Převod nedeterministického automatu na deterministický

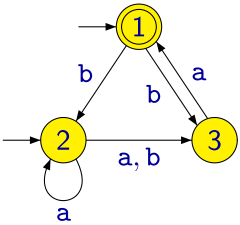


Převod nedeterministického automatu na deterministický

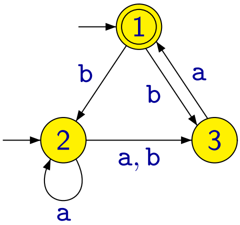




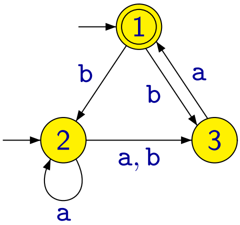
Převod nedeterministického automatu na deterministický

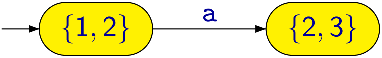


Převod nedeterministického automatu na deterministický

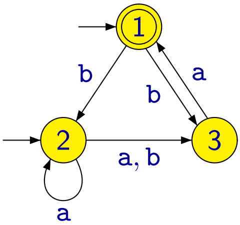


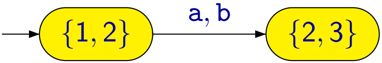
Převod nedeterministického automatu na deterministický



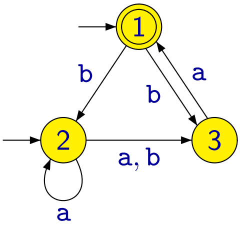


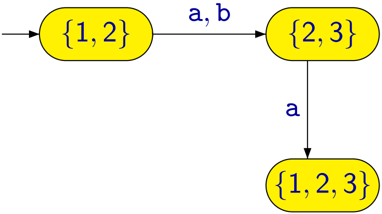
Převod nedeterministického automatu na deterministický



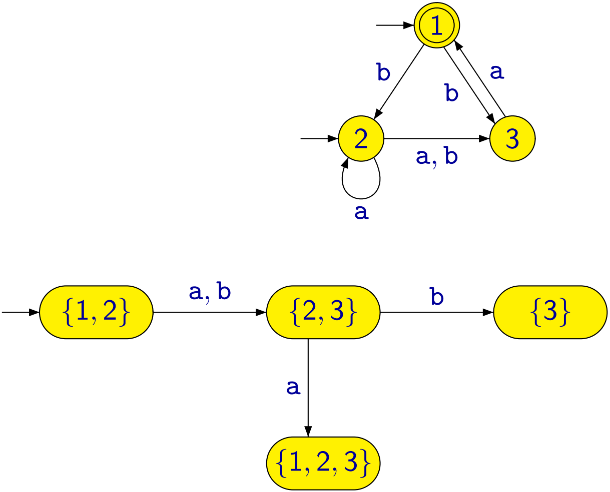


Převod nedeterministického automatu na deterministický

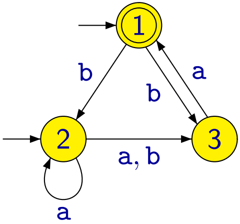


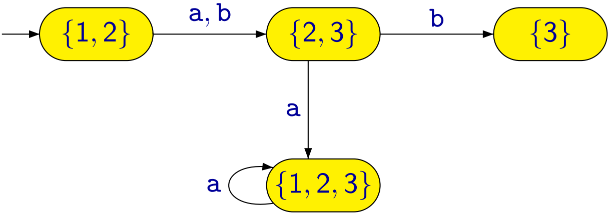


Převod nedeterministického automatu na deterministický

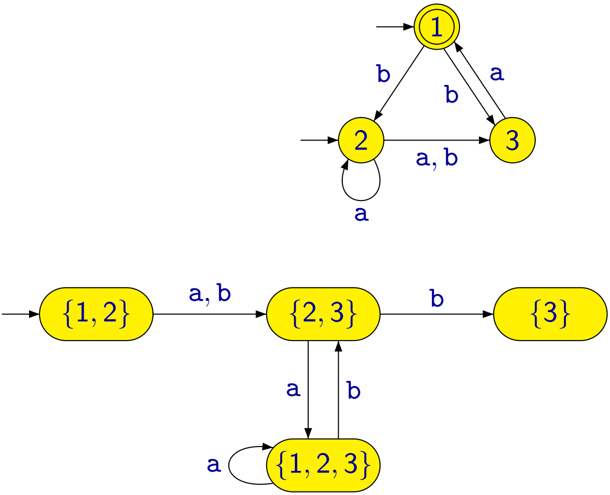


Převod nedeterministického automatu na deterministický

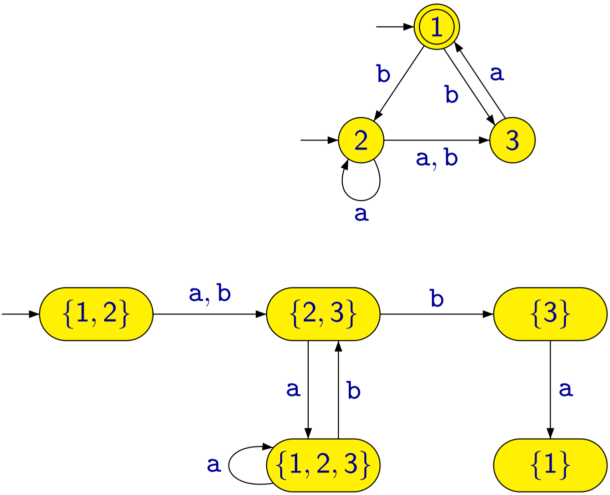




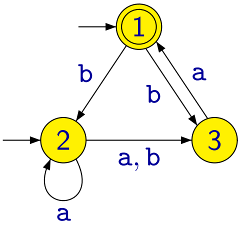
Převod nedeterministického automatu na deterministický

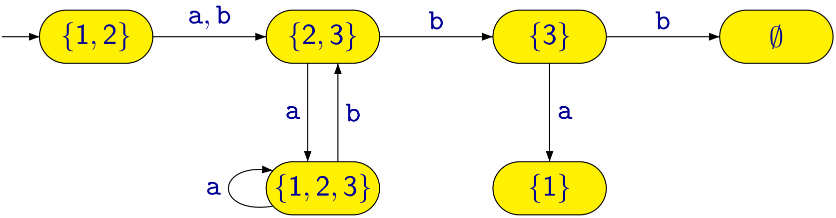


Převod nedeterministického automatu na deterministický

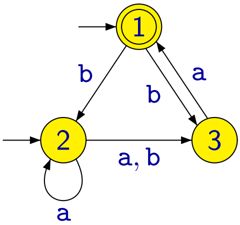


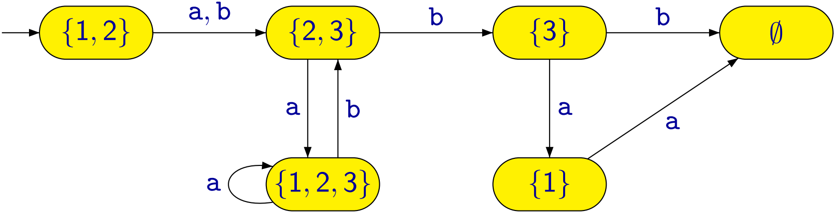
Převod nedeterministického automatu na deterministický



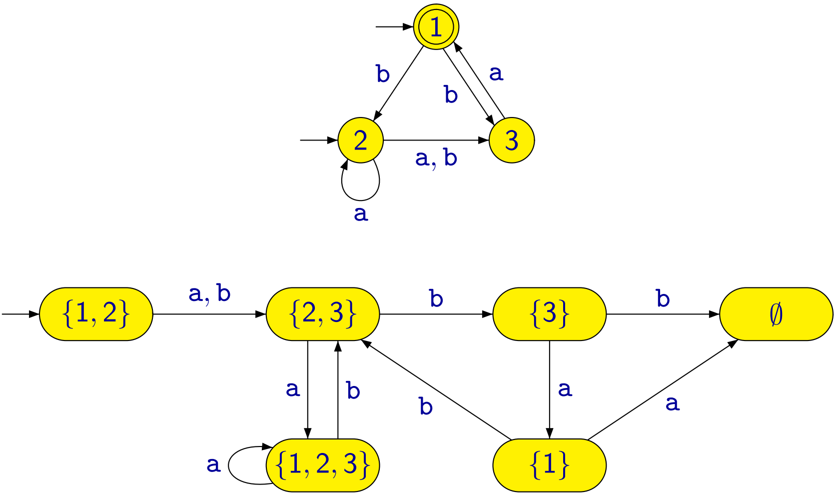


Převod nedeterministického automatu na deterministický

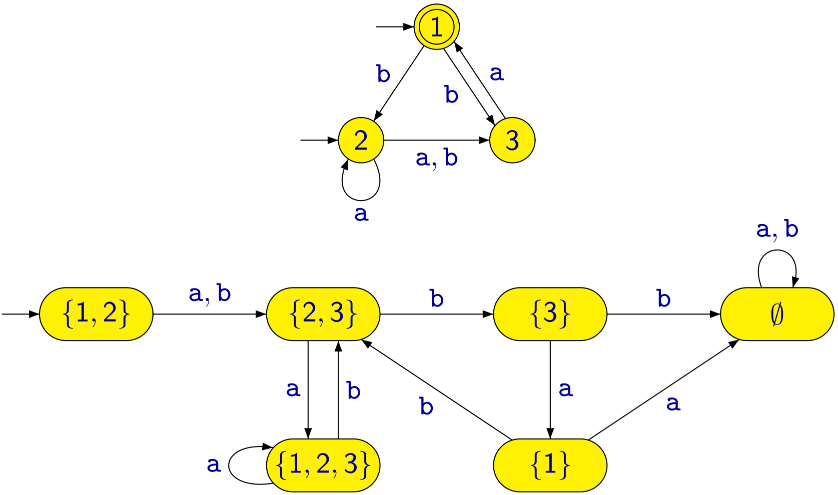




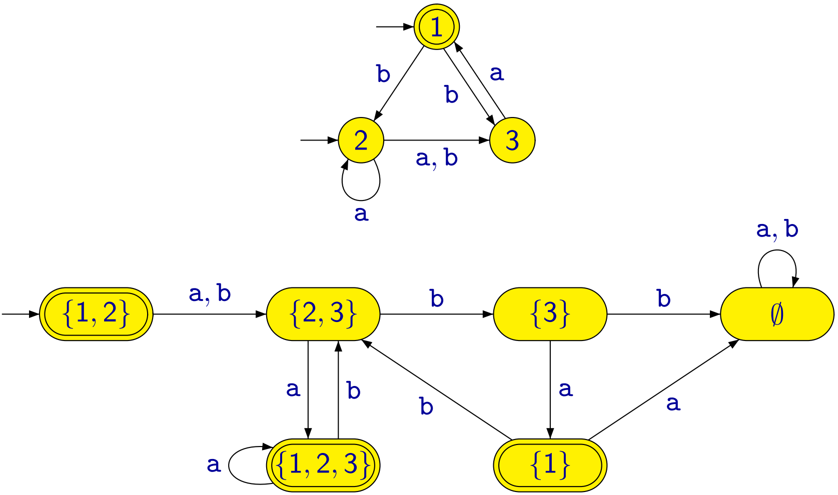
Převod nedeterministického automatu na deterministický



Převod nedeterministického automatu na deterministický



Převod nedeterministického automatu na deterministický



Převod nedeterministického automatu na deterministický

	a	b
$\leftrightarrow 1$	$-$	$2, 3$
$\rightarrow 2$	$2, 3$	3
3	1	$-$

Převod nedeterministického automatu na deterministický

	a	b
$\leftrightarrow 1$	$-$	$2, 3$
$\rightarrow 2$	$2, 3$	3
3	1	$-$

	a	b

Převod nedeterministického automatu na deterministický

	a	b
$\leftrightarrow 1$	$-$	$2,3$
$\rightarrow 2$	$2,3$	3
3	1	$-$

	a	b
$\leftrightarrow \{1,2\}$		

Převod nedeterministického automatu na deterministický

	a	b
$\leftrightarrow 1$	$-$	$2, 3$
$\rightarrow 2$	$2, 3$	3
3	1	$-$

	a	b
$\leftrightarrow \{1, 2\}$	$\{2, 3\}$	

Převod nedeterministického automatu na deterministický

	a	b
$\leftrightarrow 1$	—	$2,3$
$\rightarrow 2$	$2,3$	3
3	1	—

	a	b
$\leftrightarrow \{1,2\}$	$\{2,3\}$	
$\{2,3\}$		

Převod nedeterministického automatu na deterministický

	a	b
$\leftrightarrow 1$	$-$	$2, 3$
$\rightarrow 2$	$2, 3$	3
3	1	$-$

	a	b
$\leftrightarrow \{1, 2\}$	$\{2, 3\}$	$\{2, 3\}$
$\{2, 3\}$		

Převod nedeterministického automatu na deterministický

	a	b
$\leftrightarrow 1$	—	$2, 3$
$\rightarrow 2$	$2, 3$	3
3	1	—

	a	b
$\leftrightarrow \{1, 2\}$	$\{2, 3\}$	$\{2, 3\}$
$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$	

Převod nedeterministického automatu na deterministický

	a	b
$\leftrightarrow 1$	—	$2,3$
$\rightarrow 2$	$2,3$	3
3	1	—

	a	b
$\leftrightarrow \{1,2\}$	$\{2,3\}$	$\{2,3\}$
$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$	
$\leftarrow \{1,2,3\}$		

Převod nedeterministického automatu na deterministický

	a	b
$\leftrightarrow 1$	–	$2, 3$
$\rightarrow 2$	$2, 3$	3
3	1	–

	a	b
$\leftrightarrow \{1, 2\}$	$\{2, 3\}$	$\{2, 3\}$
$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{3\}$
$\leftarrow \{1, 2, 3\}$		

Převod nedeterministického automatu na deterministický

	a	b
$\leftrightarrow 1$	–	$2, 3$
$\rightarrow 2$	$2, 3$	3
3	1	–

	a	b
$\leftrightarrow \{1, 2\}$	$\{2, 3\}$	$\{2, 3\}$
$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{3\}$
$\leftarrow \{1, 2, 3\}$		
$\{3\}$		

Převod nedeterministického automatu na deterministický

	a	b
$\leftrightarrow 1$	$-$	$2,3$
$\rightarrow 2$	$2,3$	3
3	1	$-$

	a	b
$\leftrightarrow \{1,2\}$	$\{2,3\}$	$\{2,3\}$
$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{3\}$
$\leftarrow \{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	
$\{3\}$		

Převod nedeterministického automatu na deterministický

	a	b
$\leftrightarrow 1$	$-$	$2, 3$
$\rightarrow 2$	$2, 3$	3
3	1	$-$

	a	b
$\leftrightarrow \{1, 2\}$	$\{2, 3\}$	$\{2, 3\}$
$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{3\}$
$\leftarrow \{1, 2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{2, 3\}$
$\{3\}$		

Převod nedeterministického automatu na deterministický

	a	b
$\leftrightarrow 1$	–	2, 3
$\rightarrow 2$	2, 3	3
3	1	–

	a	b
$\leftrightarrow \{1,2\}$	$\{2,3\}$	$\{2,3\}$
$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{3\}$
$\leftarrow \{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{2,3\}$
$\{3\}$	$\{1\}$	

Převod nedeterministického automatu na deterministický

	a	b
$\leftrightarrow 1$	$-$	$2,3$
$\rightarrow 2$	$2,3$	3
3	1	$-$

	a	b
$\leftrightarrow \{1,2\}$	$\{2,3\}$	$\{2,3\}$
$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{3\}$
$\leftarrow \{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{2,3\}$
$\{3\}$	$\{1\}$	
$\leftarrow \{1\}$		

Převod nedeterministického automatu na deterministický

	a	b
$\leftrightarrow 1$	–	2, 3
$\rightarrow 2$	2, 3	3
3	1	–

	a	b
$\leftrightarrow \{1,2\}$	$\{2,3\}$	$\{2,3\}$
$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{3\}$
$\leftarrow \{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{2,3\}$
$\{3\}$	$\{1\}$	$\emptyset$
$\leftarrow \{1\}$		

Převod nedeterministického automatu na deterministický

	a	b
$\leftrightarrow 1$	$-$	$2,3$
$\rightarrow 2$	$2,3$	3
3	1	$-$

	a	b
$\leftrightarrow \{1,2\}$	$\{2,3\}$	$\{2,3\}$
$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{3\}$
$\leftarrow \{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{2,3\}$
$\{3\}$	$\{1\}$	$\emptyset$
$\leftarrow \{1\}$		
$\emptyset$		

Převod nedeterministického automatu na deterministický

	a	b
$\leftrightarrow 1$	$-$	$2,3$
$\rightarrow 2$	$2,3$	3
3	1	$-$

	a	b
$\leftrightarrow \{1,2\}$	$\{2,3\}$	$\{2,3\}$
$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{3\}$
$\leftarrow \{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{2,3\}$
$\{3\}$	$\{1\}$	$\emptyset$
$\leftarrow \{1\}$	$\emptyset$	
$\emptyset$		

Převod nedeterministického automatu na deterministický

	a	b
$\leftrightarrow 1$	–	$2, 3$
$\rightarrow 2$	$2, 3$	3
3	1	–

	a	b
$\leftrightarrow \{1, 2\}$	$\{2, 3\}$	$\{2, 3\}$
$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{3\}$
$\leftarrow \{1, 2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{2, 3\}$
$\{3\}$	$\{1\}$	$\emptyset$
$\leftarrow \{1\}$	$\emptyset$	$\{2, 3\}$
$\emptyset$		

Převod nedeterministického automatu na deterministický

	a	b
$\leftrightarrow 1$	$-$	$2, 3$
$\rightarrow 2$	$2, 3$	3
3	1	$-$

	a	b
$\leftrightarrow \{1, 2\}$	$\{2, 3\}$	$\{2, 3\}$
$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{3\}$
$\leftarrow \{1, 2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{2, 3\}$
$\{3\}$	$\{1\}$	$\emptyset$
$\leftarrow \{1\}$	$\emptyset$	$\{2, 3\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Převod nedeterministického automatu na deterministický

	a	b
$\leftrightarrow 1$	–	$2, 3$
$\rightarrow 2$	$2, 3$	3
3	1	–

	a	b
$\leftrightarrow \{1, 2\}$	$\{2, 3\}$	$\{2, 3\}$
$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{3\}$
$\leftarrow \{1, 2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{2, 3\}$
$\{3\}$	$\{1\}$	$\emptyset$
$\leftarrow \{1\}$	$\emptyset$	$\{2, 3\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

	a	b
$\leftrightarrow 1$	2	2
2	3	4
$\leftarrow 3$	3	2
4	5	6
$\leftarrow 5$	6	2
6	6	6

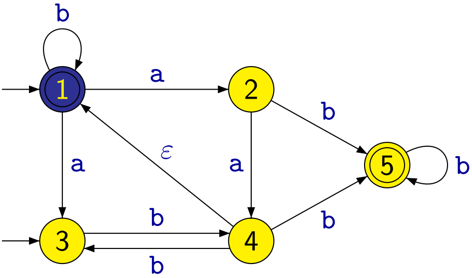
Převod nedeterministického automatu na deterministický

Poznámka: Při převodu nedeterministického automatu, který má n stavů, může mít výsledný deterministický automat až 2^n stavů.

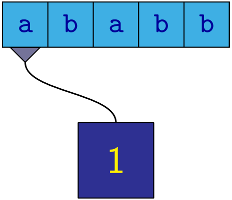
Například při převodu automatu, který má 20 stavů, může vzniknout automat, který má $2^{20} = 1048576$ stavů.

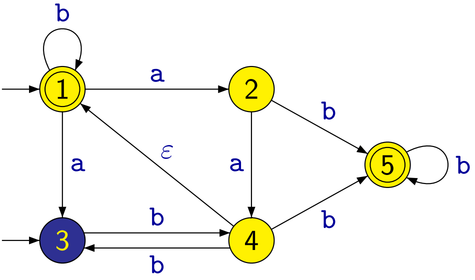
Často má sice výsledný automat podstatně méně než 2^n stavů, nicméně tyto nejhorší případy občas nastávají.

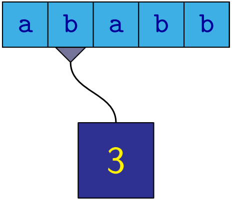
Zobecněný nedeterministický konečný automat



$(1, \texttt{ababb})$

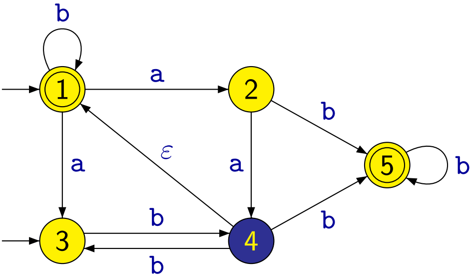


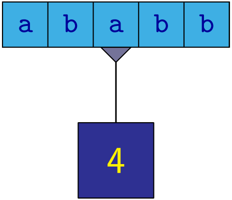




$$(1, \mathtt{ababb}) \vdash (3, \mathtt{babb})$$

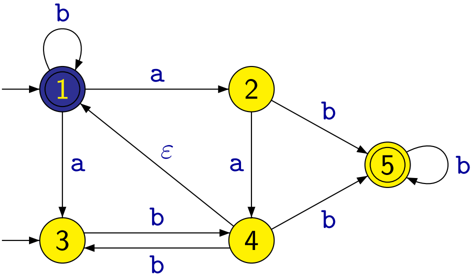
Zobecněný nedeterministický konečný automat

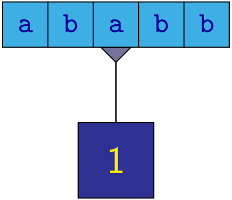




$(1, \mathtt{ababb})$
$\vdash (3, \mathtt{babb})$
$\vdash (4, \mathtt{abb})$

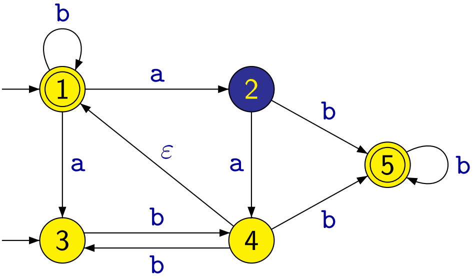
Zobecněný nedeterministický konečný automat

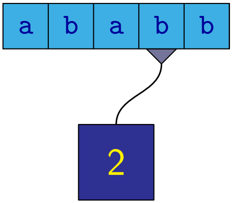




$$
\begin{aligned}
&(1, \mathtt{ababb}) \\
&\vdash (3, \mathtt{babb}) \\
&\vdash (4, \mathtt{abb}) \\
&\vdash (1, \mathtt{abb})
\end{aligned}
$$

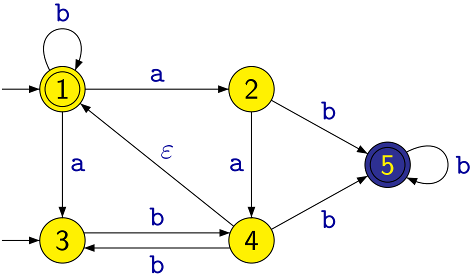
Zobecněný nedeterministický konečný automat

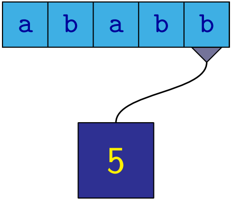




$(1, \mathtt{ababb})$
$\vdash (3, \mathtt{babb})$
$\vdash (4, \mathtt{abb})$
$\vdash (1, \mathtt{abb})$
$\vdash (2, \mathtt{bb})$

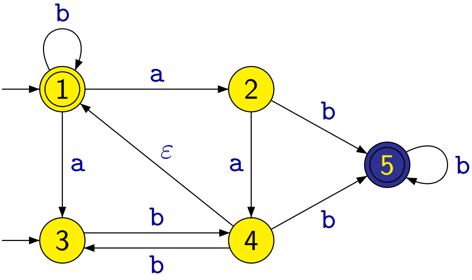
Zobecněný nedeterministický konečný automat

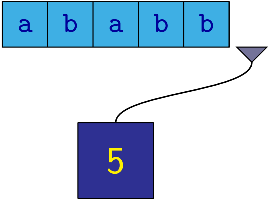




$$
\begin{aligned}
&(1, \mathtt{ababb}) \\
&\vdash (3, \mathtt{babb}) \\
&\vdash (4, \mathtt{abb}) \\
&\vdash (1, \mathtt{abb}) \\
&\vdash (2, \mathtt{bb}) \\
&\vdash (5, \mathtt{b})
\end{aligned}
$$

Zobecněný nedeterministický konečný automat





$$
\begin{aligned}
&(1, \mathtt{ababb}) \\
&\vdash (3, \mathtt{babb}) \\
&\vdash (4, \mathtt{abb}) \\
&\vdash (1, \mathtt{abb}) \\
&\vdash (2, \mathtt{bb}) \\
&\vdash (5, \mathtt{b}) \\
&\vdash (5, \varepsilon)
\end{aligned}
$$

Zobecněný nedeterministický konečný automat

Oproti nedeterministickému konečnému automatu má **zobecněný nedeterministický konečný automat** tzv. ε-**přechody**, tj. přechody označené symbolem ε.

Při provádění ε-přechodu se mění pouze stav řídící jednotky, ale hlava na pásce se neposouvá.

Poznámka: Výpočty zobecněného nedeterministického automatu mohou být libovolně dlouhé a dokonce i nekonečné (pokud graf obsahuje cyklus tvořený ε-přechody) bez ohledu na délku slova na pásce.

Zobecněný nedeterministický konečný automat

Formálně je **zobecněný nedeterministický konečný automat** definován jako pětice

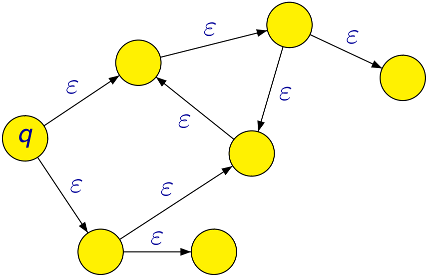
$$(Q, \Sigma, \delta, I, F)$$

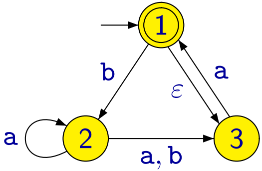
kde:

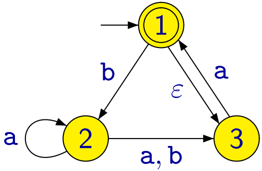
- Q je konečná množina **stavů**
- Σ je konečná **abeceda**
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Q)$ je **přechodová funkce**
- $I \subseteq Q$ je množina **počátečních stavů**
- $F \subseteq Q$ je množina **přijímajících stavů**

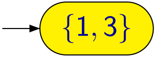
Převod na deterministický konečný automat

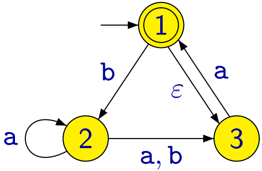
Zobecněný nedeterministický konečný automat je možné převést na deterministický podobnou konstrukcí jako nedeterministický konečný automat, s tím rozdílem, že do množin stavů musíme vždy přidat navíc i všechny stavy dosažitelné daných stavů nějakou sekvencí ε-přechodů.

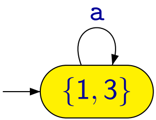


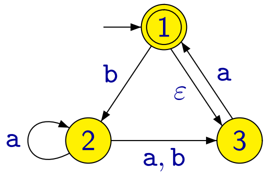

1
b
a
ε
a
2
3
a, b

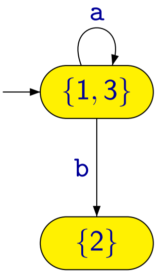

1
b
a
ε
a
2
3
a, b

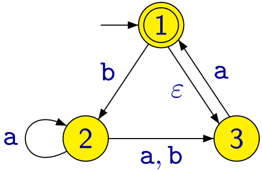

{1, 3}

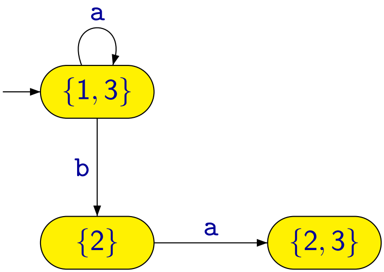

1
2
3
b
a
ε
a
a, b

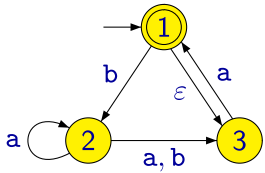

a
{1, 3}

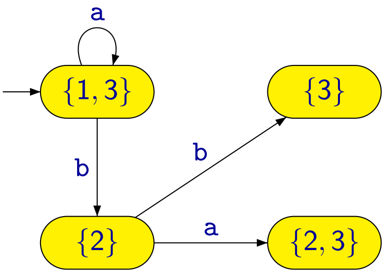

1
2
3
a
b
ε
a
a, b

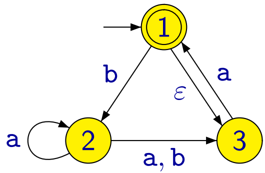

a
$\{1,3\}$
b
$\{2\}$

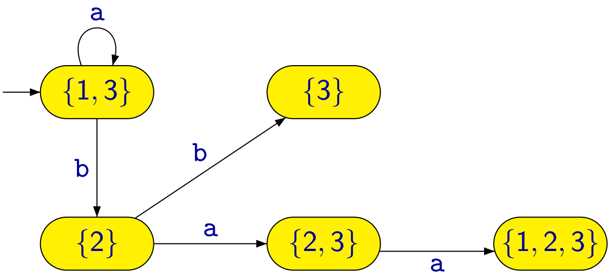

1
b
a
ε
a
2
a, b
3

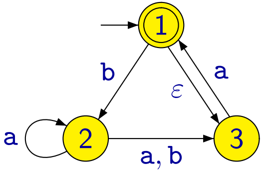

a
{1,3}
b
{2}
a
{2,3}

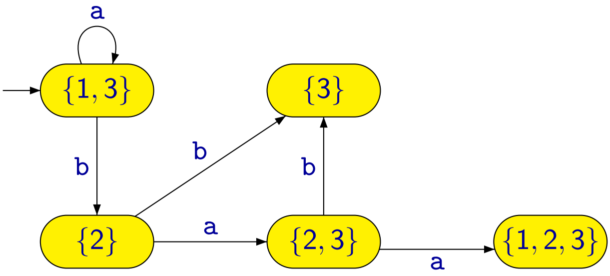

1
b
a
ε
2
3
a
a, b

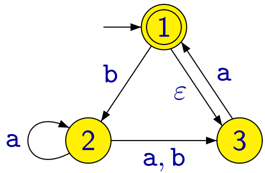

a
{1, 3}
{3}
b
b
{2}
a
{2, 3}

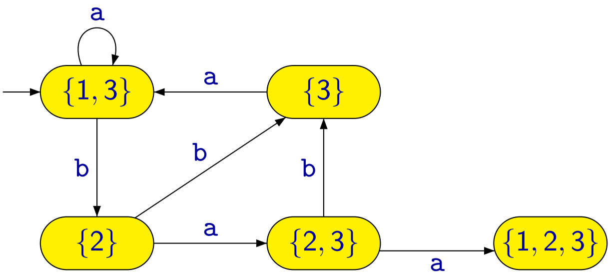

1
b
a
ε
2
3
a
a, b

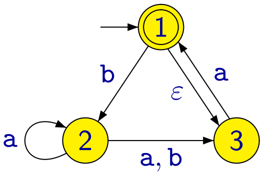

a
{1, 3}
{3}
b
b
{2}
a
{2, 3}
a
{1, 2, 3}

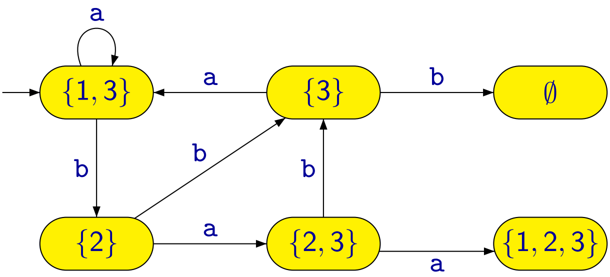

1
2
3
b
a
ε
a
a, b

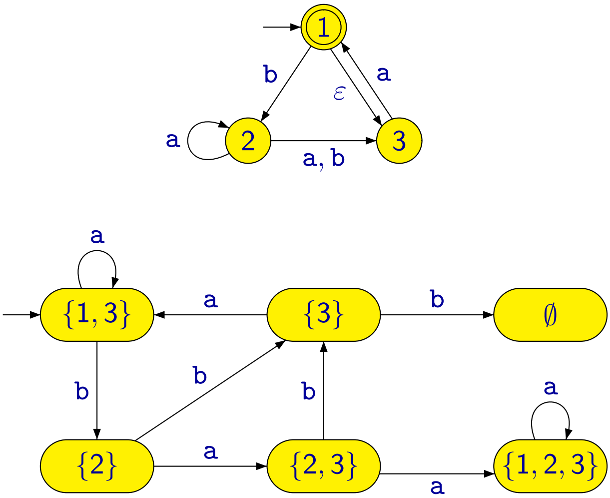

{1, 3}
{3}
{2}
{2, 3}
{1, 2, 3}
a
b
b
b
a
a

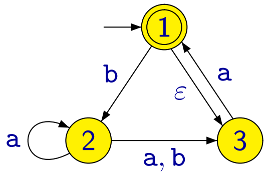

1
2
3
b
a
ε
a
a, b

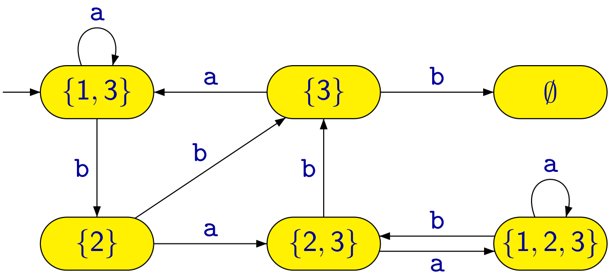

{1, 3}
{3}
{2}
{2, 3}
{1, 2, 3}
a
a
b
b
b
a
a

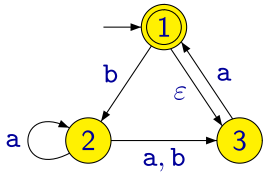

1
b
ε
a
a
2
a, b
3

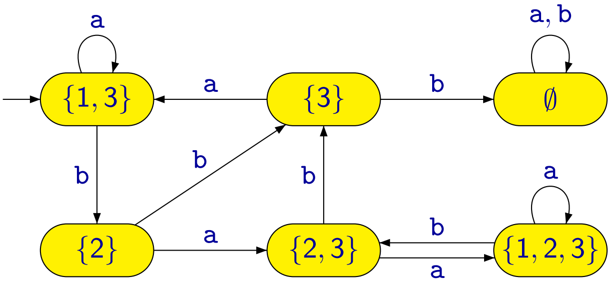

a
{1, 3}
a
{3}
b
∅
b
b
b
{2}
a
{2, 3}
a
{1, 2, 3}

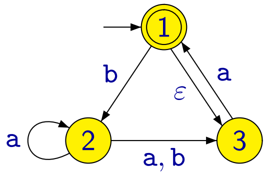

1
b
a
ε
a
2
3
a, b
a
{1, 3}
a
{3}
b
∅
b
b
b
a
{2}
a
{2, 3}
{1, 2, 3}
a

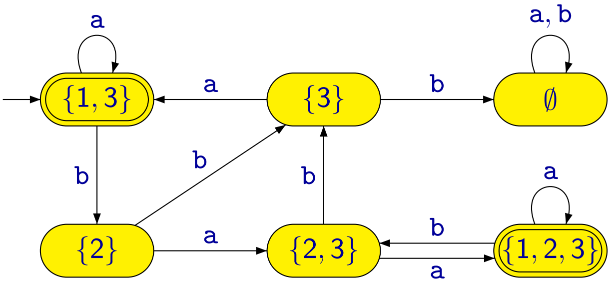

1
b
a
ε
a
2
3
a, b


a
{1, 3}
a
{3}
b
∅
b
b
b
a
{2}
a
{2, 3}
b
{1, 2, 3}
a


1
2
3
b
a
ε
a
a, b


{1, 3}
{3}
∅
{2}
{2, 3}
{1, 2, 3}
a
a
b
a, b
b
b
b
a
b
a
a

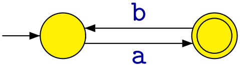

1
2
3
a
b
a
ε
a, b


{1, 3}
{3}
∅
{2}
{2, 3}
{1, 2, 3}
a
a
b
a, b
b
b
b
a
a
b
a

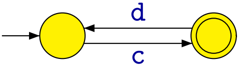
Zřetězení jazyků

$\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$

A_1:

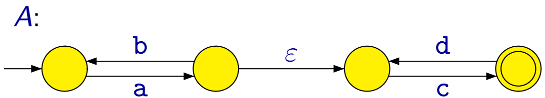


A_2:



Zřetězení jazyků

$\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$

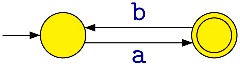


$L(A) = L(A_1) \cdot L(A_2)$

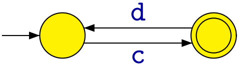
Zřetězení jazyků

$\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$

A_1:

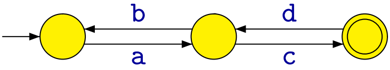


A_2:



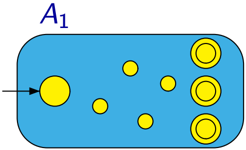
Chybná konstrukce:

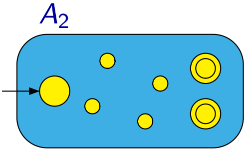
A:



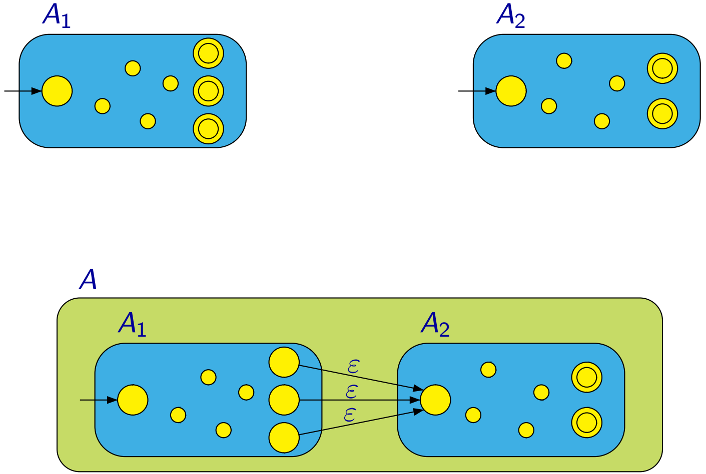
$\mathtt{acdbac} \in L(A)$, ale $\mathtt{acdbac} \notin L(A_1) \cdot L(A_2)$

Zřetězení jazyků

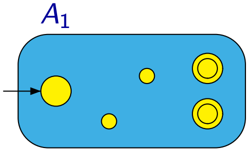




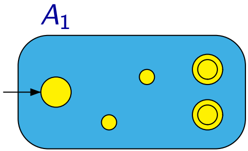
Zřetězení jazyků

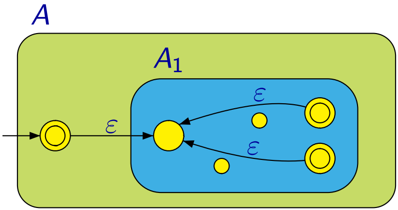


Iterace jazyka



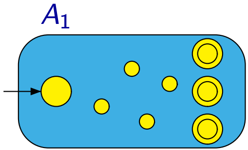
Iterace jazyka

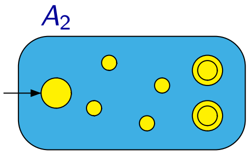




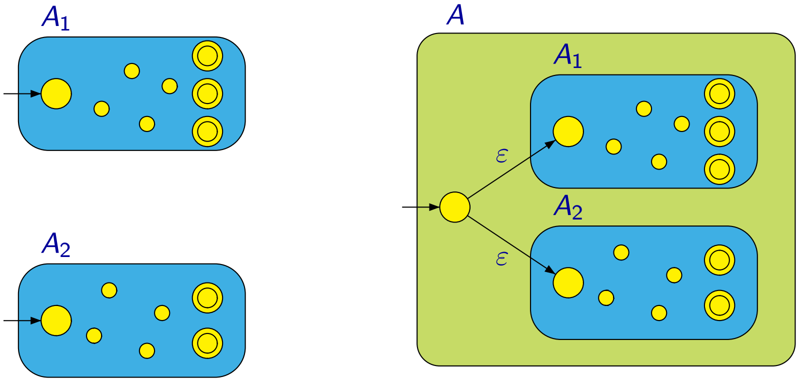
Sjednocení jazyků

Alternativní konstrukce pro sjednocení jazyků:





Alternativní konstrukce pro sjednocení jazyků:



Uzavřenost množiny vůči operacím

Předpokládejme, že máme dány množiny X a Y, kde $X \subseteq Y$, a dále nějakou operaci $f : Y \times Y \times \cdots \times Y \to Y$.

O množině X řekneme, že je **uzavřená** vůči operaci f, jestliže platí, že pokud $x_1, x_2, \cdots, x_k \in X$, pak $f(x_1, x_2, \cdots, x_k) \in X$.

Příklad: Uvažujme množinu přirozených čísel $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ a množinu reálných čísel $\mathbb{R}$.

- Množina $\mathbb{N}$ je uzavřená vůči operacím $+$ a $\times$, ale není uzavřená vůči operacím $-$ a $/$.

  Například $3 + 5 \in \mathbb{N}$, ale $3 - 5 \notin \mathbb{N}$ a $3/5 \notin \mathbb{N}$
- Množina $\mathbb{R}$ je uzavřená vůči operacím $+$, $-$, $\times$.
- Množina $\mathbb{R} - \{0\}$ je uzavřená vůči operaci $/$.

Uzavřenost třídy regulárních jazyků

Množina (všech) regulárních jazyků je uzavřená vůči operacím:

- sjednocení
- průniku
- doplňku
- zřetězení
- iteraci
- ...

Poznámka: Jazyk je regulární, pokud existuje konečný automat, který ho rozpoznává.

Existují i jazyky, které nejsou regulární.