

Cvičení 2

Naivní teorie množin

Příklad 1: Nadefinujte, uveďte příklad a nakreslete:

- Sjednocení množin A a B . ($A \cup B$)
- Průnik množin A a B . ($A \cap B$)
- Rozdíl množin A a B . ($A \setminus B$)
- Vztah, že množina A je podmnožinou množiny B . ($A \subseteq B$)
- Doplněk množiny A vzhledem k množině M . (\overline{A})
- Rovnost množin A a B . ($A = B$)
- Potenční množina množiny A . $\mathcal{P}(A)$ (nebo 2^A)
- Vztah, že množina A je vlastní podmnožinou B . ($A \subset B$)

Příklad 2: Dokažte (přímo i nepřímo), že pro libovolné množiny A, B platí:

- $A = B$, právě když $A \subseteq B$ a $B \subseteq A$
- $A \subseteq (A \cup B)$
- $(A \cap B) \subseteq A$
- Když $A = \emptyset$ a $B = \emptyset$, pak $(A \cup B) = \emptyset$ a obráceně.
- Jestliže $A = \emptyset$, pak $(A \cap B) = \emptyset$ pro libovolnou množinu B .
- $((A \cup B) \setminus C) \subseteq (A \cup (B \setminus C))$
- $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
- $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

Příklad 3: Rozhodněte, zda platí:

- $a \in \{\{a\}, \{a, \{a\}\}\}$
- $\{a, \{a\}\} \cap \mathcal{P}(\{a, \{a\}\}) = \emptyset$
- $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$
- $\bigcap_{X \in I} X = \emptyset$, kde $I = \mathcal{P}(A)$

Příklad 4: Určete všechny prvky následujících množin:

- a) $\{a, \{a\}\} \cup \{a, \{b\}, c\}$
- b) $\{a, \{a\}\} \cap \{a, \{b\}, c\}$
- c) $\{a, \{a\}\} \setminus \{a, \{b\}, c\}$
- d) \overline{A} vzhledem k B , kde $A = \{a, b, \{c\}\}$, $B = \{a, b, \{c\}, \{a, b\}\}$ a $A \subseteq B$

Příklad 5: Rozhodněte, zda platí:

- a) Množina lidí žijících v Evropě nebo Asii a ne na Urale je podmnožinou lidí žijících v Evropě nebo v Asii.
- b) Všichni obyvatelé České republiky žijí na Moravě nebo v Čechách nebo ve Slezsku.
- c) Někteří obyvatelé Moravy žijí ve Slezsku.
- d) Všichni lidé žijící v Evropě a Asii patří do množiny lidí žijících v Asii nebo v Evropě.

Intuitivní dokazování

Příklad 6: Rozhodněte platnost následujících úsudků (a zdůvodněte).

- a) Všechny myši jsou hranaté.
Všechno hranaté je modré.
– proto: Všechny myši jsou modré.
- b) Někteří psi rádi přednášejí básně.
Všichni psi jsou laviny.
– proto: Některé laviny rády přednášejí básně.
- c) Všichni žáci jsou ryby.
Někteří žáci jsou mloci.
– proto: Někteří mloci jsou ryby.
- d) Všechny žáby jsou modré.
Tento kůň je modrý.
– proto: Tento kůň je žába.
- e) Některé mraky mají černé puntíky.
Všechny domy mají černé puntíky.
– proto: Některé mraky jsou domy.
- f) Všechny ovce jsou sloni.
Někteří sloni jsou čápi.
– proto: Všechny ovce jsou čápi.

-
- g) Nikdo s červenýmnosem nemůže být premiér.
Všichni muži mají červené nosy.
– proto: Žádný muž nemůže být premiérem.
- h) Všichni jezevci jsou sběratelé umění.
Někteří sběratelé umění žijí v norách.
– proto: Někteří jezevci žijí v norách.
- i) Nikdo s fialovými vlasy není mladý.
Někteří lidé, kteří mají fialové vlasy, pijí mléko.
– proto: Někteří lidé, kteří pijí mléko, nejsou mladí.
- j) Karel má rád jen ty, kteří mají rádi Alici.
Karel má rád Michala.
– proto: Michal má rád Alici.