Cvičení 5

Příklad 1: Pomocí Vennových diagramů ověřte platnost úsudků:

a) Nikdo s červeným nosem nemůže být premiér.
Všichni Valaši mají červené nosy.
———
Proto žádný Valach nemůže být premiérem.

b) Všichni jezevci jsou sběratelé umění.
Někteří sběratelé umění žijí v norách.
———
Proto někteří jezevci žijí v norách.

c) Všechny skleněné hory jsou hory.
Všechny skleněné hory jsou ze skla.
———
Některé hory jsou ze skla.

d) Všechna auta jsou dopravní prostředky.
Všechna auta mají volant.
———
Některé dopravní prostředky mají volant.

e) Někteří fotbalisté nejsou inteligentní.
Všichni fotbalisté jsou sportovci.
———
Někteří sportovci nejsou inteligentní.

f) Všechny přírodní zákony jsou zákony.
Všechny zákony jsou vytvářeny právními institucemi.
———
Všechny přírodní zákony jsou vytvářeny právními institucemi.

g) Všichni členové vedení jsou majiteli obligací nebo akcionáři.
Žádný člen vedení není zároveň majitel obligací i akcionář.
Všichni majitelé obligací jsou členy vedení.
———
Žádný majitel obligací není akcionář.

h) Všichni státníci jsou politiky.
Někteří státníci nejsou inteligentní.
Někteří politici nejsou státníci.
———
Někteří politici nejsou inteligentní.

Příklad 2: Pomocí formulí PL1 formálně definujte následující pojmy:

a) Rovnost množin A a B. $(A = B)$

b) Prázdná množina. $(\emptyset)$

c) Vztah, že množina A je podmnožinou množiny B. $(A \subseteq B)$

d) Vztah, že množina A je vlastní podmnožinou B. $(A \subset B)$

e) Sjednocení množin A a B. $(A \cup B)$

f) Průnik množin A a B. $(A \cap B)$

g) Rozdíl množin A a B. $(A - B)$

h) Doplněk množiny A vzhledem k množině M. $(\overline{A})$

i) Potenční množina množiny A. $\mathcal{P}(A)$ (nebo 2^A)

Příklad 3: S využitím formálních definic z předchozího příkladu dokažte formálně následující tvrzení.

a) $A = B$ právě tehdy, když $A \subseteq B$ a $B \subseteq A$

b) $A \subseteq (A \cup B)$

c) $(A \cap B) \subseteq A$

d) $A = \emptyset$ a $B = \emptyset$ právě tehdy, když $(A \cup B) = \emptyset$

e) Jestliže $A = \emptyset$, pak $(A \cap B) = \emptyset$ pro libovolnou množinu B.

f) $(A \cup B) - C \subseteq A \cup (B - C)$

g) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

h) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

Příklad 4: Dokažte, že pro každou formuli PL1 φ, která neobsahuje symbol negace $(\neg)$, existuje interpretace I taková, že pro každou valuaci e je formule φ pravdivá v interpretaci I s valuací e.