Bezkontextové gramatiky

Bezkontextové gramatiky

Příklad:

$$
\begin{aligned}
\langle \text{STMT} \rangle &\to \langle \text{IF-STMT} \rangle \mid \langle \text{WHILE-STMT} \rangle \mid \langle \text{BLOCK-STMT} \rangle \mid \\
&\quad \langle \text{ASSG-STMT} \rangle \\
\langle \text{IF-STMT} \rangle &\to \textbf{if } \langle \text{BOOL-EXPR} \rangle \textbf{ then } \langle \text{STMT} \rangle \textbf{ else } \langle \text{STMT} \rangle \\
\langle \text{WHILE-STMT} \rangle &\to \textbf{while } \langle \text{BOOL-EXPR} \rangle \textbf{ do } \langle \text{STMT} \rangle \\
\langle \text{BLOCK-STMT} \rangle &\to \textbf{begin } \langle \text{STMT-LIST} \rangle \textbf{ end} \\
\langle \text{STMT-LIST} \rangle &\to \langle \text{STMT} \rangle \mid \langle \text{STMT} \rangle \,; \langle \text{STMT-LIST} \rangle \\
\langle \text{ASSG-STMT} \rangle &\to \langle \text{VAR} \rangle := \langle \text{ARITH-EXPR} \rangle \\
\langle \text{BOOL-EXPR} \rangle &\to \langle \text{ARITH-EXPR} \rangle \langle \text{COMPARE-OP} \rangle \langle \text{ARITH-EXPR} \rangle \\
\langle \text{COMPARE-OP} \rangle &\to < \mid > \mid \leq \mid \geq \mid = \mid \neq \\
\langle \text{ARITH-EXPR} \rangle &\to \langle \text{VAR} \rangle \mid \langle \text{CONST} \rangle \mid \\
&\quad (\langle \text{ARITH-EXPR} \rangle \langle \text{ARITH-OP} \rangle \langle \text{ARITH-EXPR} \rangle) \\
\langle \text{ARITH-OP} \rangle &\to + \mid - \mid * \mid / \\
\langle \text{CONST} \rangle &\to 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9 \\
\langle \text{VAR} \rangle &\to a \mid b \mid c \mid \cdots \mid x \mid y \mid z
\end{aligned}
$$

Bezkontextové gramatiky

Symbolům, které mají v předchozím příkladě tvar $\langle \text{XXX} \rangle$, se říká **neterminální symboly** (**neterminály**).

Pravidla popisují, jaké řetězce může daný neterminál reprezentovat.

Z neterminálu $\langle \text{STMT} \rangle$ můžeme například dostat text

$$\textbf{while } x \leq y \textbf{ do begin } x := (x + 1)\,;\; y := (y - 1) \textbf{ end}$$

Bezkontextové gramatiky

$$\textbf{while } x \leq y \textbf{ do begin } x := (x + 1)\,;\; y := (y - 1) \textbf{ end}$$

Bezkontextové gramatiky

$$\textbf{while } x \leq y \textbf{ do begin } x := (x + 1)\,;\; y := (y - 1) \textbf{ end}$$

$\langle \text{STMT} \rangle$

Bezkontextové gramatiky

$$\textbf{while } x \leq y \textbf{ do begin } x := (x + 1)\,;\; y := (y - 1) \textbf{ end}$$

$\langle \text{STMT} \rangle$
$\langle \text{WHILE-STMT} \rangle$

Bezkontextové gramatiky

$$\textbf{while } x \leq y \textbf{ do begin } x := (x + 1)\,;\; y := (y - 1) \textbf{ end}$$

$\langle \text{STMT} \rangle$
$\langle \text{WHILE-STMT} \rangle$
while $\langle \text{BOOL-EXPR} \rangle$ **do** $\langle \text{STMT} \rangle$

Bezkontextové gramatiky

while $x \leq y$ **do begin** $x := (x + 1)\,;\; y := (y - 1)$ **end**

$\langle \text{STMT} \rangle$
$\langle \text{WHILE-STMT} \rangle$
while $\langle \text{BOOL-EXPR} \rangle$ **do** $\langle \text{STMT} \rangle$
while $\langle \text{ARITH-EXPR} \rangle \langle \text{COMPARE-OP} \rangle \langle \text{ARITH-EXPR} \rangle$ **do** $\langle \text{STMT} \rangle$

Bezkontextové gramatiky

while $x \leq y$ **do begin** $x := (x + 1)\,;\; y := (y - 1)$ **end**

$\langle \text{STMT} \rangle$
$\langle \text{WHILE-STMT} \rangle$
while $\langle \text{BOOL-EXPR} \rangle$ **do** $\langle \text{STMT} \rangle$
while $\langle \text{ARITH-EXPR} \rangle \langle \text{COMPARE-OP} \rangle \langle \text{ARITH-EXPR} \rangle$ **do** $\langle \text{STMT} \rangle$
while $\langle \text{VAR} \rangle \langle \text{COMPARE-OP} \rangle \langle \text{ARITH-EXPR} \rangle$ **do** $\langle \text{STMT} \rangle$

Bezkontextové gramatiky

while $x \leq y$ **do begin** $x := (x + 1)\,;\; y := (y - 1)$ **end**

$\langle \text{STMT} \rangle$
$\langle \text{WHILE-STMT} \rangle$
while $\langle \text{BOOL-EXPR} \rangle$ **do** $\langle \text{STMT} \rangle$
while $\langle \text{ARITH-EXPR} \rangle \langle \text{COMPARE-OP} \rangle \langle \text{ARITH-EXPR} \rangle$ **do** $\langle \text{STMT} \rangle$
while $\langle \text{VAR} \rangle \langle \text{COMPARE-OP} \rangle \langle \text{ARITH-EXPR} \rangle$ **do** $\langle \text{STMT} \rangle$
while $\langle \text{VAR} \rangle \leq \langle \text{ARITH-EXPR} \rangle$ **do** $\langle \text{STMT} \rangle$

Bezkontextové gramatiky

while $x \leq y$ **do begin** $x := (x + 1)\,;\; y := (y - 1)$ **end**

$\langle \text{STMT} \rangle$
$\langle \text{WHILE-STMT} \rangle$
while $\langle \text{BOOL-EXPR} \rangle$ **do** $\langle \text{STMT} \rangle$
while $\langle \text{ARITH-EXPR} \rangle \langle \text{COMPARE-OP} \rangle \langle \text{ARITH-EXPR} \rangle$ **do** $\langle \text{STMT} \rangle$
while $\langle \text{VAR} \rangle \langle \text{COMPARE-OP} \rangle \langle \text{ARITH-EXPR} \rangle$ **do** $\langle \text{STMT} \rangle$
while $\langle \text{VAR} \rangle \leq \langle \text{ARITH-EXPR} \rangle$ **do** $\langle \text{STMT} \rangle$
while $\langle \text{VAR} \rangle \leq \langle \text{VAR} \rangle$ **do** $\langle \text{STMT} \rangle$

Bezkontextové gramatiky

while $x \leq y$ **do begin** $x := (x + 1)\,;\; y := (y - 1)$ **end**

$\langle \text{STMT} \rangle$
$\langle \text{WHILE-STMT} \rangle$
while $\langle \text{BOOL-EXPR} \rangle$ **do** $\langle \text{STMT} \rangle$
while $\langle \text{ARITH-EXPR} \rangle \langle \text{COMPARE-OP} \rangle \langle \text{ARITH-EXPR} \rangle$ **do** $\langle \text{STMT} \rangle$
while $\langle \text{VAR} \rangle \langle \text{COMPARE-OP} \rangle \langle \text{ARITH-EXPR} \rangle$ **do** $\langle \text{STMT} \rangle$
while $\langle \text{VAR} \rangle \leq \langle \text{ARITH-EXPR} \rangle$ **do** $\langle \text{STMT} \rangle$
while $\langle \text{VAR} \rangle \leq \langle \text{VAR} \rangle$ **do** $\langle \text{STMT} \rangle$
while $x \leq \langle \text{VAR} \rangle$ **do** $\langle \text{STMT} \rangle$

Bezkontextové gramatiky

while $x \leq y$ **do begin** $x := (x + 1)\,;\; y := (y - 1)$ **end**

$\langle \text{STMT} \rangle$
$\langle \text{WHILE-STMT} \rangle$
while $\langle \text{BOOL-EXPR} \rangle$ **do** $\langle \text{STMT} \rangle$
while $\langle \text{ARITH-EXPR} \rangle \langle \text{COMPARE-OP} \rangle \langle \text{ARITH-EXPR} \rangle$ **do** $\langle \text{STMT} \rangle$
while $\langle \text{VAR} \rangle \langle \text{COMPARE-OP} \rangle \langle \text{ARITH-EXPR} \rangle$ **do** $\langle \text{STMT} \rangle$
while $\langle \text{VAR} \rangle \leq \langle \text{ARITH-EXPR} \rangle$ **do** $\langle \text{STMT} \rangle$
while $\langle \text{VAR} \rangle \leq \langle \text{VAR} \rangle$ **do** $\langle \text{STMT} \rangle$
while $x \leq \langle \text{VAR} \rangle$ **do** $\langle \text{STMT} \rangle$
while $x \leq y$ **do** $\langle \text{STMT} \rangle$

Bezkontextové gramatiky

while $x \leq y$ **do begin** $x := (x + 1)\,;\; y := (y - 1)$ **end**

$\langle \text{STMT} \rangle$
$\langle \text{WHILE-STMT} \rangle$
while $\langle \text{BOOL-EXPR} \rangle$ **do** $\langle \text{STMT} \rangle$
while $\langle \text{ARITH-EXPR} \rangle \langle \text{COMPARE-OP} \rangle \langle \text{ARITH-EXPR} \rangle$ **do** $\langle \text{STMT} \rangle$
while $\langle \text{VAR} \rangle \langle \text{COMPARE-OP} \rangle \langle \text{ARITH-EXPR} \rangle$ **do** $\langle \text{STMT} \rangle$
while $\langle \text{VAR} \rangle \leq \langle \text{ARITH-EXPR} \rangle$ **do** $\langle \text{STMT} \rangle$
while $\langle \text{VAR} \rangle \leq \langle \text{VAR} \rangle$ **do** $\langle \text{STMT} \rangle$
while $x \leq \langle \text{VAR} \rangle$ **do** $\langle \text{STMT} \rangle$
while $x \leq y$ **do** $\langle \text{STMT} \rangle$
while $x \leq y$ **do** $\langle \text{BLOCK-STMT} \rangle$

Bezkontextové gramatiky

while $x \leq y$ **do begin** $x := (x + 1)\,;\; y := (y - 1)$ **end**

$\langle$STMT$\rangle$
$\langle$WHILE-STMT$\rangle$
while $\langle$BOOL-EXPR$\rangle$ **do** $\langle$STMT$\rangle$
while $\langle$ARITH-EXPR$\rangle\langle$COMPARE-OP$\rangle\langle$ARITH-EXPR$\rangle$ **do** $\langle$STMT$\rangle$
while $\langle$VAR$\rangle\langle$COMPARE-OP$\rangle\langle$ARITH-EXPR$\rangle$ **do** $\langle$STMT$\rangle$
while $\langle$VAR$\rangle \leq \langle$ARITH-EXPR$\rangle$ **do** $\langle$STMT$\rangle$
while $\langle$VAR$\rangle \leq \langle$VAR$\rangle$ **do** $\langle$STMT$\rangle$
while $x \leq \langle$VAR$\rangle$ **do** $\langle$STMT$\rangle$
while $x \leq y$ **do** $\langle$STMT$\rangle$
while $x \leq y$ **do** $\langle$BLOCK-STMT$\rangle$
while $x \leq y$ **do begin** $\langle$STMT-LIST$\rangle$ **end**

Bezkontextové gramatiky

while $x \leq y$ **do begin** $x := (x + 1)\,;\; y := (y - 1)$ **end**

$\langle$STMT$\rangle$
$\langle$WHILE-STMT$\rangle$
while $\langle$BOOL-EXPR$\rangle$ **do** $\langle$STMT$\rangle$
while $\langle$ARITH-EXPR$\rangle\langle$COMPARE-OP$\rangle\langle$ARITH-EXPR$\rangle$ **do** $\langle$STMT$\rangle$
while $\langle$VAR$\rangle\langle$COMPARE-OP$\rangle\langle$ARITH-EXPR$\rangle$ **do** $\langle$STMT$\rangle$
while $\langle$VAR$\rangle \leq \langle$ARITH-EXPR$\rangle$ **do** $\langle$STMT$\rangle$
while $\langle$VAR$\rangle \leq \langle$VAR$\rangle$ **do** $\langle$STMT$\rangle$
while $x \leq \langle$VAR$\rangle$ **do** $\langle$STMT$\rangle$
while $x \leq y$ **do** $\langle$STMT$\rangle$
while $x \leq y$ **do** $\langle$BLOCK-STMT$\rangle$
while $x \leq y$ **do begin** $\langle$STMT-LIST$\rangle$ **end**
...

Bezkontextové gramatiky

Formálně je **bezkontextová gramatika** definována jako čtveřice

$$G = (\Pi, \Sigma, S, P)$$

kde:

- Π je konečná množina **neterminálních symbolů** (**neterminálů**)
- Σ je konečná množina **terminálních symbolů** (**terminálů**), přičemž $\Pi \cap \Sigma = \emptyset$
- $S \in \Pi$ je **počáteční neterminál**
- $P \subseteq \Pi \times (\Pi \cup \Sigma)^*$ je konečná množina **přepisovacích pravidel**

Bezkontextové gramatiky

Poznámky:

- Pro označení neterminálních symbolů budeme používat velká písmena A, B, C, ...
- Pro označení terminálních symbolů budeme používat malá písmena a, b, c, ... nebo číslice 0, 1, 2, ...
- Pro označení řetězců z $(\Pi \cup \Sigma)^*$ budeme používat malá písmena řecké abecedy α, β, γ, ...
- Místo zápisu (A, α) budeme pro pravidla používat zápis

$$A \to \alpha$$

A – levá strana pravidla
α – pravá strana pravidla

Bezkontextové gramatiky

Příklad: Gramatika $G = (\Pi, \Sigma, S, P)$, kde

- $\Pi = \{A, B, C\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $S = A$
- P obsahuje pravidla

$$A \to aBBb$$
$$A \to AaA$$
$$B \to \varepsilon$$
$$B \to bCA$$
$$C \to AB$$
$$C \to a$$
$$C \to b$$

Bezkontextové gramatiky

Poznámka: Pokud máme více pravidel se stejnou levou stranou, jako třeba

$$A \to \alpha_1 \qquad A \to \alpha_2 \qquad A \to \alpha_3$$

můžeme je stručněji zapsat jako

$$A \to \alpha_1 \mid \alpha_2 \mid \alpha_3$$

Například pravidla dříve uvedené gramatiky můžeme zapsat jako

$$\begin{aligned} A &\to aBBb \mid AaA \\ B &\to \varepsilon \mid bCA \\ C &\to AB \mid a \mid b \end{aligned}$$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $G = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$A \to aBBb \mid AaA$$
$$B \to \varepsilon \mid bCA$$
$$C \to AB \mid a \mid b$$

Například slovo $abbabb$ je možné v gramatice G vygenerovat následujícím způsobem:

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $G = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$A \to aBBb \mid AaA$$
$$B \to \varepsilon \mid bCA$$
$$C \to AB \mid a \mid b$$

Například slovo $abbabb$ je možné v gramatice G vygenerovat následujícím způsobem:

A

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $G = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$\underline{A} \to aBBb \mid AaA$$
$$B \to \varepsilon \mid bCA$$
$$C \to AB \mid a \mid b$$

Například slovo *abbabb* je možné v gramatice G vygenerovat následujícím způsobem:

$\underline{A}$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $G = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$\underline{A} \to \underline{aBBb} \mid AaA$$
$$B \to \varepsilon \mid bCA$$
$$C \to AB \mid a \mid b$$

Například slovo $abbabb$ je možné v gramatice G vygenerovat následujícím způsobem:

$\underline{A} \Rightarrow \underline{aBBb}$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $G = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$A \to aBBb \mid AaA$$
$$B \to \varepsilon \mid bCA$$
$$C \to AB \mid a \mid b$$

Například slovo $abbabb$ je možné v gramatice G vygenerovat následujícím způsobem:

$A \Rightarrow aBBb$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $G = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$A \to aBBb \mid AaA$$
$$\underline{B} \to \varepsilon \mid bCA$$
$$C \to AB \mid a \mid b$$

Například slovo $abbabb$ je možné v gramatice G vygenerovat následujícím způsobem:

$A \Rightarrow a\underline{B}Bb$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $G = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$A \to aBBb \mid AaA$$
$$B \to \varepsilon \mid bCA$$
$$C \to AB \mid a \mid b$$

Například slovo $abbabb$ je možné v gramatice G vygenerovat následujícím způsobem:

$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $G = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$A \to aBBb \mid AaA$$
$$B \to \varepsilon \mid bCA$$
$$C \to AB \mid a \mid b$$

Například slovo $abbabb$ je možné v gramatice G vygenerovat následujícím způsobem:

$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $G = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$\underline{A} \to aBBb \mid AaA$$
$$B \to \varepsilon \mid bCA$$
$$C \to AB \mid a \mid b$$

Například slovo $abbabb$ je možné v gramatice G vygenerovat následujícím způsobem:

$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abC\underline{A}Bb$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $G = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$\underline{A} \to \underline{aBBb} \mid AaA$$
$$B \to \varepsilon \mid bCA$$
$$C \to AB \mid a \mid b$$

Například slovo $abbabb$ je možné v gramatice G vygenerovat následujícím způsobem:

$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abC\underline{A}Bb \Rightarrow abC\underline{aBBb}Bb$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $G = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$A \to aBBb \mid AaA$$
$$B \to \varepsilon \mid bCA$$
$$C \to AB \mid a \mid b$$

Například slovo $abbabb$ je možné v gramatice G vygenerovat následujícím způsobem:

$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $G = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$A \to aBBb \mid AaA$$
$$B \to \varepsilon \mid bCA$$
$$C \to AB \mid a \mid b$$

Například slovo $abbabb$ je možné v gramatice G vygenerovat následujícím způsobem:

$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $G = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$A \to aBBb \mid AaA$$
$$\underline{B} \to \underline{\varepsilon} \mid bCA$$
$$C \to AB \mid a \mid b$$

Například slovo $abbabb$ je možné v gramatice G vygenerovat následujícím způsobem:

$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaB\underline{B}bBb \Rightarrow abCaBbBb$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $G = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$A \to aBBb \mid AaA$$
$$B \to \varepsilon \mid bCA$$
$$C \to AB \mid a \mid b$$

Například slovo $abbabb$ je možné v gramatice G vygenerovat následujícím způsobem:

$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow abCaBbBb$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $G = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$A \to aBBb \mid AaA$$
$$B \to \varepsilon \mid bCA$$
$$\underline{C} \to AB \mid a \mid b$$

Například slovo $abbabb$ je možné v gramatice G vygenerovat následujícím způsobem:

$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow ab\underline{C}aBbBb$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $G = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$A \to aBBb \mid AaA$$
$$B \to \varepsilon \mid bCA$$
$$\underline{C} \to AB \mid a \mid \underline{b}$$

Například slovo $abbabb$ je možné v gramatice G vygenerovat následujícím způsobem:

$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow ab\underline{C}aBbBb \Rightarrow ab\underline{b}aBbBb$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $G = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$A \to aBBb \mid AaA$$
$$B \to \varepsilon \mid bCA$$
$$C \to AB \mid a \mid b$$

Například slovo $abbabb$ je možné v gramatice G vygenerovat následujícím způsobem:

$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow abCaBbBb \Rightarrow abbaBbBb$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $G = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$A \to aBBb \mid AaA$$
$$\underline{B} \to \varepsilon \mid bCA$$
$$C \to AB \mid a \mid b$$

Například slovo $abbabb$ je možné v gramatice G vygenerovat následujícím způsobem:

$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow abCaBbBb \Rightarrow abbaBb\underline{B}b$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $G = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$A \to aBBb \mid AaA$$
$$\underline{B} \to \underline{\varepsilon} \mid bCA$$
$$C \to AB \mid a \mid b$$

Například slovo $abbabb$ je možné v gramatice G vygenerovat následujícím způsobem:

$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow abCaBbBb \Rightarrow abbaBb\underline{B}b \Rightarrow abbaBbb$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $G = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$A \to aBBb \mid AaA$$
$$B \to \varepsilon \mid bCA$$
$$C \to AB \mid a \mid b$$

Například slovo $abbabb$ je možné v gramatice G vygenerovat následujícím způsobem:

$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow abCaBbBb \Rightarrow abbaBbBb \Rightarrow abbaBbb$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $G = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$A \to aBBb \mid AaA$$
$$B \to \varepsilon \mid bCA$$
$$C \to AB \mid a \mid b$$

Například slovo $abbabb$ je možné v gramatice G vygenerovat následujícím způsobem:

$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow abCaBbBb \Rightarrow abbaBbBb \Rightarrow abbaBbb$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $G = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$A \to aBBb \mid AaA$$
$$\underline{B} \to \underline{\varepsilon} \mid bCA$$
$$C \to AB \mid a \mid b$$

Například slovo $abbabb$ je možné v gramatice G vygenerovat následujícím způsobem:

$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow abCaBbBb \Rightarrow abbaBbBb \Rightarrow abba\underline{B}bb \Rightarrow abbabb$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $G = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$A \to aBBb \mid AaA$$
$$B \to \varepsilon \mid bCA$$
$$C \to AB \mid a \mid b$$

Například slovo $abbabb$ je možné v gramatice G vygenerovat následujícím způsobem:

$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow abCaBbBb \Rightarrow abbaBbBb \Rightarrow abbaBbb \Rightarrow abbabb$

Bezkontextové gramatiky

Na řetězcích z $(\Pi \cup \Sigma)^*$ definujeme relaci $\Rightarrow \subseteq (\Pi \cup \Sigma)^* \times (\Pi \cup \Sigma)^*$ takovou, že

$$\alpha \Rightarrow \alpha'$$

právě když $\alpha = \beta_1 A \beta_2$ a $\alpha' = \beta_1 \gamma \beta_2$ pro nějaká $\beta_1, \beta_2, \gamma \in (\Pi \cup \Sigma)^*$ a $A \in \Pi$, kde $(A \to \gamma) \in P$.

Příklad: Jestliže $(B \to bCA) \in P$, pak

$$aCBbA \Rightarrow aCbCAbA$$

Poznámka: Neformálně řečeno zápis $\alpha \Rightarrow \alpha'$ znamená, že z α je možné jedním krokem odvodit α', a to tak, že výskyt nějakého neterminálu A v α nahradíme pravou stranou nějakého pravidla $A \to \gamma$, kde se A vyskytuje na levé straně.

Bezkontextové gramatiky

Na řetězcích z $(\Pi \cup \Sigma)^*$ definujeme relaci $\Rightarrow \subseteq (\Pi \cup \Sigma)^* \times (\Pi \cup \Sigma)^*$ takovou, že

$$\alpha \Rightarrow \alpha'$$

právě když $\alpha = \beta_1 A \beta_2$ a $\alpha' = \beta_1 \gamma \beta_2$ pro nějaká $\beta_1, \beta_2, \gamma \in (\Pi \cup \Sigma)^*$ a $A \in \Pi$, kde $(A \to \gamma) \in P$.

Příklad: Jestliže $(B \to bCA) \in P$, pak

$$aC\underline{B}bA \Rightarrow aC\underline{bCA}bA$$

Poznámka: Neformálně řečeno zápis $\alpha \Rightarrow \alpha'$ znamená, že z α je možné jedním krokem odvodit α', a to tak, že výskyt nějakého neterminálu A v α nahradíme pravou stranou nějakého pravidla $A \to \gamma$, kde se A vyskytuje na levé straně.

Bezkontextové gramatiky

Derivace délky n je posloupnost $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$, kde $\beta_i \in (\Pi \cup \Sigma)^*$ a kde $\beta_{i-1} \Rightarrow \beta_i$ pro všechna $1 \leq i \leq n$, což můžeme stručněji zapsat

$$\beta_0 \Rightarrow \beta_1 \Rightarrow \beta_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \beta_{n-1} \Rightarrow \beta_n$$

Skutečnost, že pro dané $\alpha, \alpha' \in (\Pi \cup \Sigma)^*$ a $n \in \mathbb{N}$ existuje nějaká derivace $\beta_0 \Rightarrow \beta_1 \Rightarrow \beta_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \beta_{n-1} \Rightarrow \beta_n$, kde $\alpha = \beta_0$ a $\alpha' = \beta_n$, zapisujeme

$$\alpha \Rightarrow^n \alpha'$$

Skutečnost, že $\alpha \Rightarrow^n \alpha'$ pro nějaké $n \geq 0$, zapisujeme

$$\alpha \Rightarrow^* \alpha'$$

Poznámka: Relace $\Rightarrow^*$ je reflexivním a tranzitivním uzávěrem relace $\Rightarrow$ (tj. nejmenší reflexivní a tranzitivní relací obsahující relaci $\Rightarrow$).

Bezkontextové gramatiky

Větné formy jsou ty $\alpha \in (\Pi \cup \Sigma)^*$, pro které platí

$$S \Rightarrow^* \alpha$$

kde S je počáteční neterminál.

Bezkontextové gramatiky

Jazyk $L(G)$ generovaný gramatikou $G = (\Pi, \Sigma, S, P)$ je množina všech slov v abecedě Σ, která lze odvodit nějakou derivací z počátečního neterminálu S pomocí pravidel z P, tj.

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow^* w\}$$

Bezkontextové gramatiky

Příklad: Chceme vytvořit gramatiku generující jazyk

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

Bezkontextové gramatiky

Příklad: Chceme vytvořit gramatiku generující jazyk

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

Gramatika $G = (\Pi, \Sigma, S, P)$, kde $\Pi = \{S\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje

$$S \to aSb \mid \varepsilon$$

Bezkontextové gramatiky

Příklad: Chceme vytvořit gramatiku generující jazyk

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

Gramatika $G = (\Pi, \Sigma, S, P)$, kde $\Pi = \{S\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje

$$S \to aSb \mid \varepsilon$$

$S \Rightarrow \varepsilon$
$S \Rightarrow aSb \Rightarrow ab$
$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aabb$
$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aaaSbbb \Rightarrow aaabbb$
$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aaaSbbb \Rightarrow aaaaSbbbb \Rightarrow aaaabbbb$
$\ldots$

Bezkontextové gramatiky

Příklad: Chceme vytvořit gramatiku generující jazyk tvořený všemi palindromy nad abecedou $\{a, b\}$, tj.

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = w^R\}$$

Poznámka: w^R označuje tzv. **zrcadlový obraz** slova w, tj. slovo w zapsané pozpátku.

Bezkontextové gramatiky

Příklad: Chceme vytvořit gramatiku generující jazyk tvořený všemi palindromy nad abecedou $\{a, b\}$, tj.

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = w^R\}$$

Poznámka: w^R označuje tzv. **zrcadlový obraz** slova w, tj. slovo w zapsané pozpátku.

Řešení:

$$S \to aSa \mid bSb \mid a \mid b \mid \varepsilon$$

Bezkontextové gramatiky

Příklad: Chceme vytvořit gramatiku generující jazyk tvořený všemi palindromy nad abecedou $\{a, b\}$, tj.

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = w^R\}$$

Poznámka: w^R označuje tzv. **zrcadlový obraz** slova w, tj. slovo w zapsané pozpátku.

Řešení:

$$S \to aSa \mid bSb \mid a \mid b \mid \varepsilon$$

$$S \Rightarrow aSa \Rightarrow abSba \Rightarrow abaSaba \Rightarrow abaaaba$$

Bezkontextové gramatiky

Příklad: Chceme vytvořit gramatiku generující jazyk L tvořený všemi dobře uzávorkovanými sekvencemi symbolů '(' a ')'.

Například $(()())(()) \in L$, ale $)()) \notin L$.

Bezkontextové gramatiky

Příklad: Chceme vytvořit gramatiku generující jazyk L tvořený všemi dobře uzávorkovanými sekvencemi symbolů '(' a ')'.

Například $(()())(()) \in L$, ale $)()) \notin L$.

Řešení:

$$S \to \varepsilon \mid (S) \mid SS$$

Bezkontextové gramatiky

Příklad: Chceme vytvořit gramatiku generující jazyk L tvořený všemi dobře uzávorkovanými sekvencemi symbolů '(' a ')'.

Například $(()())(()) \in L$, ale $)()) \notin L$.

Řešení:

$$S \to \varepsilon \mid (S) \mid SS$$

$S \Rightarrow SS \Rightarrow (S)S \Rightarrow (S)(S) \Rightarrow (SS)(S) \Rightarrow ((S)S)(S) \Rightarrow$
$(()S)(S) \Rightarrow (()(S))(S) \Rightarrow (()())(S) \Rightarrow (()())((S)) \Rightarrow$
$(()())(())$

Bezkontextové gramatiky

Příklad: Chceme vytvořit gramatiku generující jazyk L tvořený všemi dobře vytvořenými aritmetickými výrazy, kde operandy jsou vždy tvaru 'a', a kde jako operátory můžeme používat symboly $+$ a $*$.

Například $(a + a) * a + (a * a) \in L$.

Bezkontextové gramatiky

Příklad: Chceme vytvořit gramatiku generující jazyk L tvořený všemi dobře vytvořenými aritmetickými výrazy, kde operandy jsou vždy tvaru 'a', a kde jako operátory můžeme používat symboly $+$ a $*$.

Například $(a + a) * a + (a * a) \in L$.

Řešení:

$$E \to a \mid E + E \mid E * E \mid (E)$$

Bezkontextové gramatiky

Příklad: Chceme vytvořit gramatiku generující jazyk L tvořený všemi dobře vytvořenými aritmetickými výrazy, kde operandy jsou vždy tvaru 'a', a kde jako operátory můžeme používat symboly $+$ a $*$.

Například $(a + a) * a + (a * a) \in L$.

Řešení:

$$E \to a \mid E + E \mid E * E \mid (E)$$

$$E \Rightarrow E + E \Rightarrow E * E + E \Rightarrow (E) * E + E \Rightarrow (E + E) * E + E \Rightarrow$$
$$(a + E) * E + E \Rightarrow (a + a) * E + E \Rightarrow (a + a) * a + E \Rightarrow (a + a) * a + (E) \Rightarrow$$
$$(a + a) * a + (E * E) \Rightarrow (a + a) * a + (a * E) \Rightarrow (a + a) * a + (a * a)$$

Derivační strom

$A \to aBBb \mid AaA$
$B \to \varepsilon \mid bCA$
$C \to AB \mid a \mid b$

Derivační strom

A

$A \to aBBb \mid AaA$
$B \to \varepsilon \mid bCA$
$C \to AB \mid a \mid b$

A

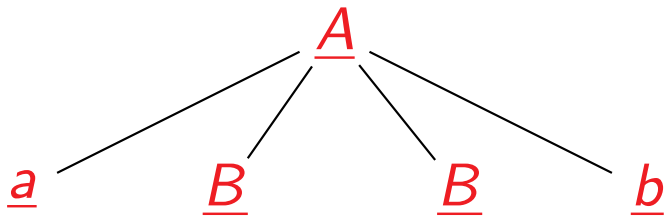
Derivační strom

$\underline{A}$

$\underline{A} \to aBBb \mid AaA$
$B \to \varepsilon \mid bCA$
$C \to AB \mid a \mid b$

$\underline{A}$

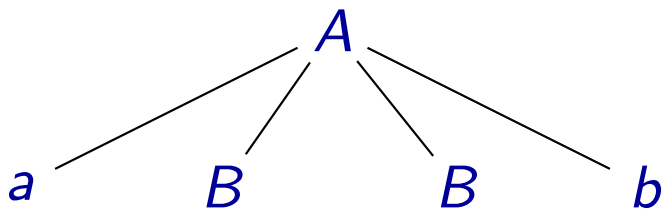
Derivační strom



$\underline{A} \to \underline{aBBb} \mid AaA$
$B \to \varepsilon \mid bCA$
$C \to AB \mid a \mid b$

$\underline{A} \Rightarrow \underline{aBBb}$

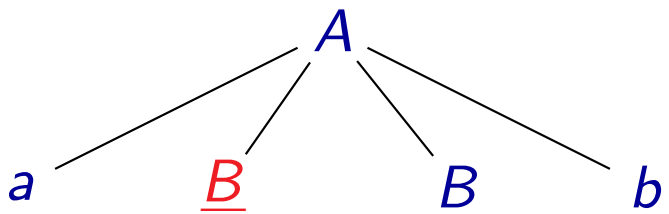
Derivační strom



$A \to aBBb \mid AaA$
$B \to \varepsilon \mid bCA$
$C \to AB \mid a \mid b$

$A \Rightarrow aBBb$

Derivační strom

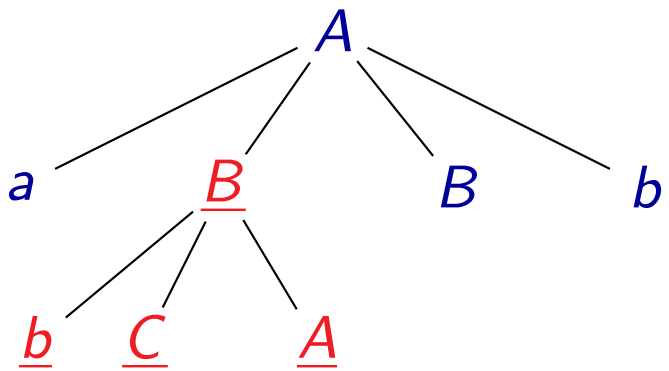


$A \to aBBb \mid AaA$
$\underline{B} \to \varepsilon \mid bCA$
$C \to AB \mid a \mid b$

$A \Rightarrow a\underline{B}Bb$

Derivační strom

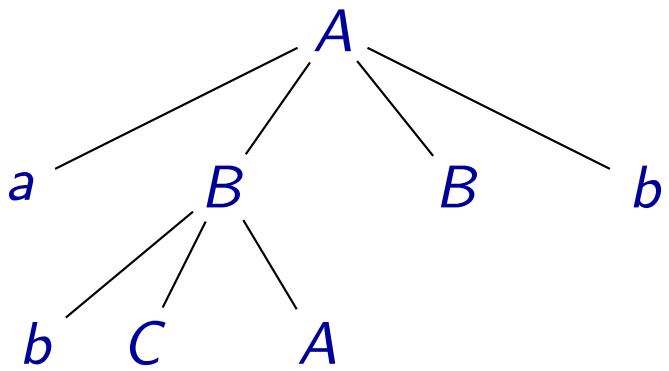
$A \to aBBb \mid AaA$
$\underline{B} \to \varepsilon \mid \underline{bCA}$
$C \to AB \mid a \mid b$



$A \Rightarrow a\underline{B}Bb \Rightarrow a\underline{bCA}Bb$

Derivační strom

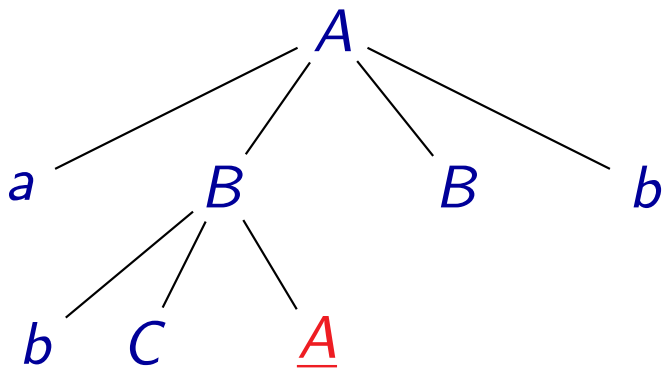
$A \to aBBb \mid AaA$
$B \to \varepsilon \mid bCA$
$C \to AB \mid a \mid b$



$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb$

Derivační strom

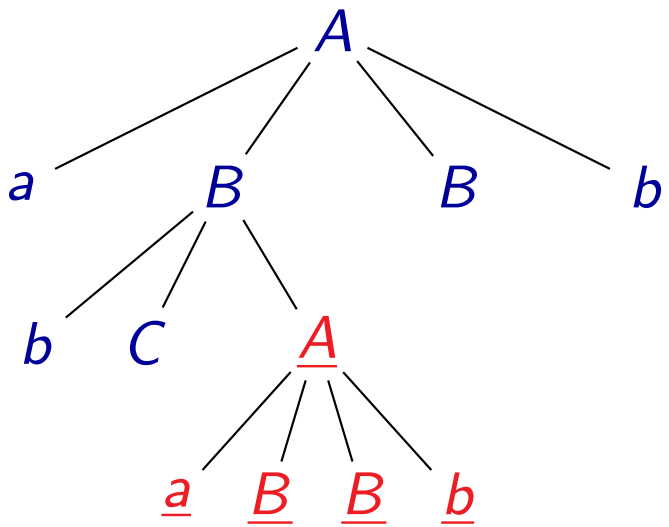
$\underline{A} \to aBBb \mid AaA$
$B \to \varepsilon \mid bCA$
$C \to AB \mid a \mid b$



$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abC\underline{A}Bb$

Derivační strom

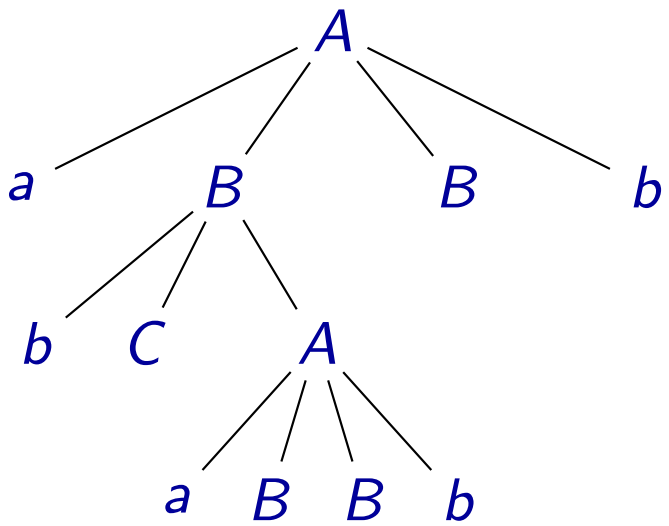
$\underline{A} \to \underline{aBBb} \mid AaA$
$B \to \varepsilon \mid bCA$
$C \to AB \mid a \mid b$



$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abC\underline{A}Bb \Rightarrow abC\underline{aBBb}Bb$

Derivační strom

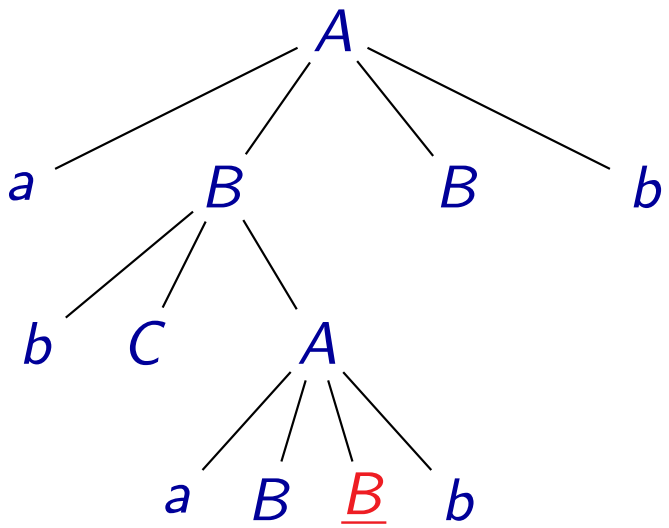
$A \to aBBb \mid AaA$
$B \to \varepsilon \mid bCA$
$C \to AB \mid a \mid b$



$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb$

Derivační strom

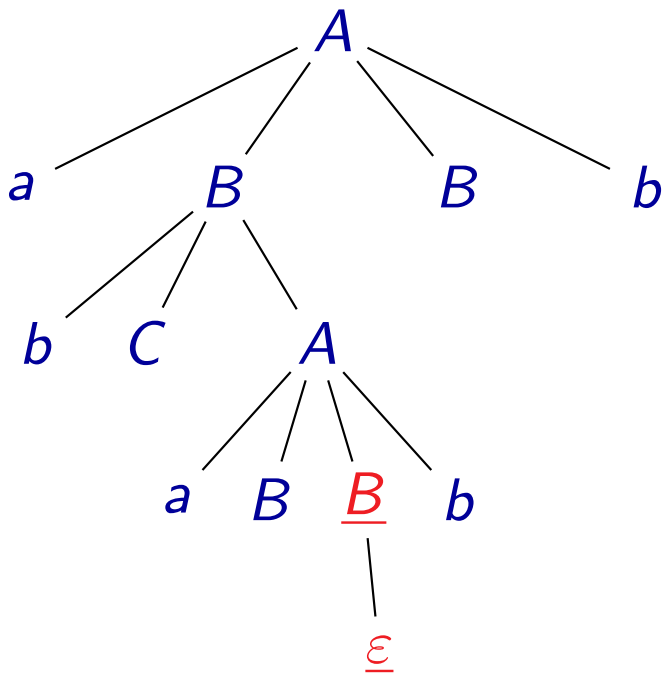
$A \to aBBb \mid AaA$
$\underline{B} \to \varepsilon \mid bCA$
$C \to AB \mid a \mid b$



$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaB\underline{B}bBb$

Derivační strom

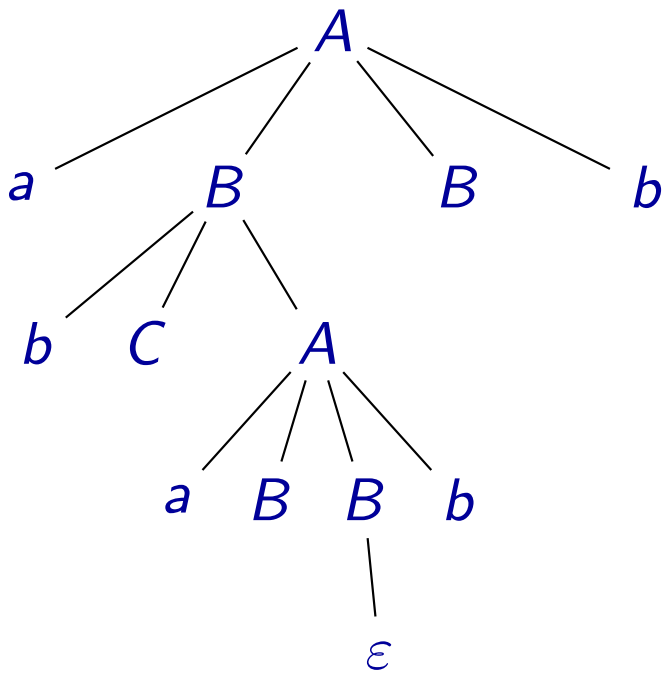
$A \to aBBb \mid AaA$
$\underline{B} \to \underline{\varepsilon} \mid bCA$
$C \to AB \mid a \mid b$



$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaB\underline{B}bBb \Rightarrow abCaBbBb$

Derivační strom

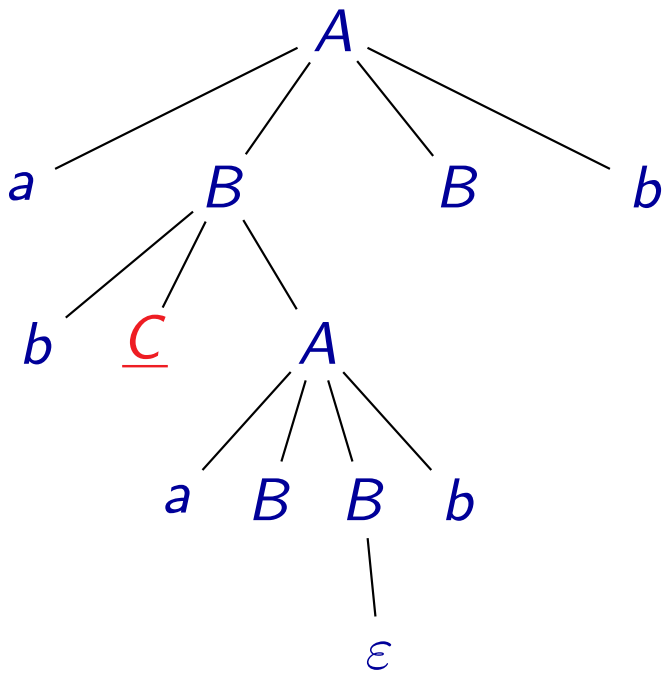
$A \to aBBb \mid AaA$
$B \to \varepsilon \mid bCA$
$C \to AB \mid a \mid b$



$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow abCaBbBb$

Derivační strom

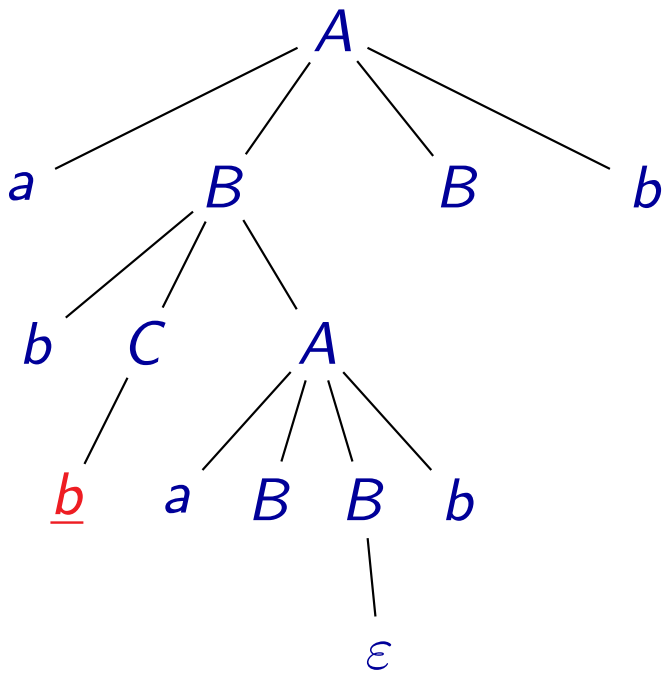
$A \to aBBb \mid AaA$
$B \to \varepsilon \mid bCA$
$\underline{C} \to AB \mid a \mid b$



$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow ab\underline{C}aBbBb$

Derivační strom

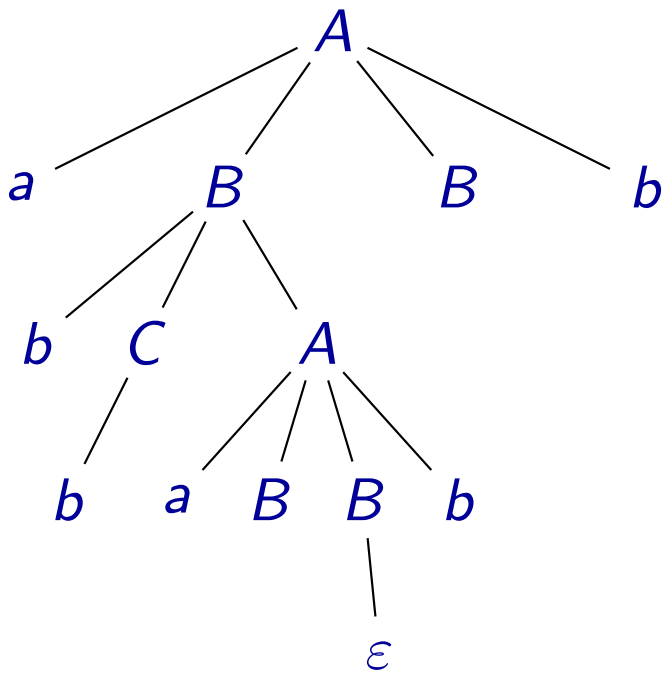
$A \to aBBb \mid AaA$
$B \to \varepsilon \mid bCA$
$\underline{C} \to AB \mid a \mid \underline{b}$



$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow ab\underline{C}aBbBb \Rightarrow ab\underline{b}aBbBb$

Derivační strom

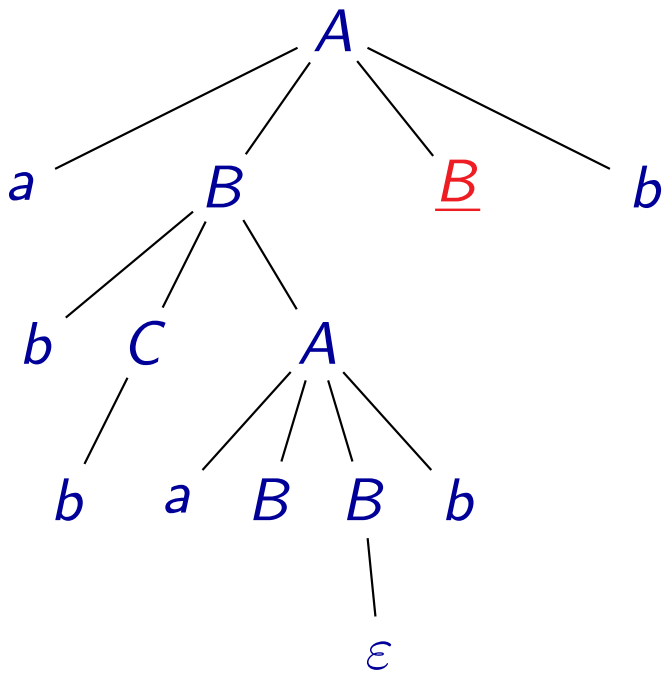
$A \to aBBb \mid AaA$
$B \to \varepsilon \mid bCA$
$C \to AB \mid a \mid b$



$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow abCaBbBb \Rightarrow abbaBbBb$

Derivační strom

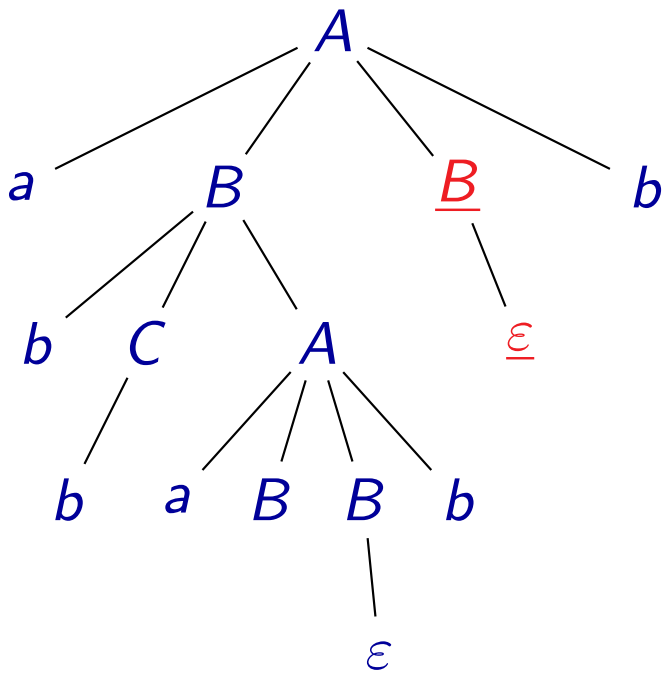
$A \to aBBb \mid AaA$
$\underline{B} \to \varepsilon \mid bCA$
$C \to AB \mid a \mid b$



$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow abCaBbBb \Rightarrow abbaBb\underline{B}b$

Derivační strom

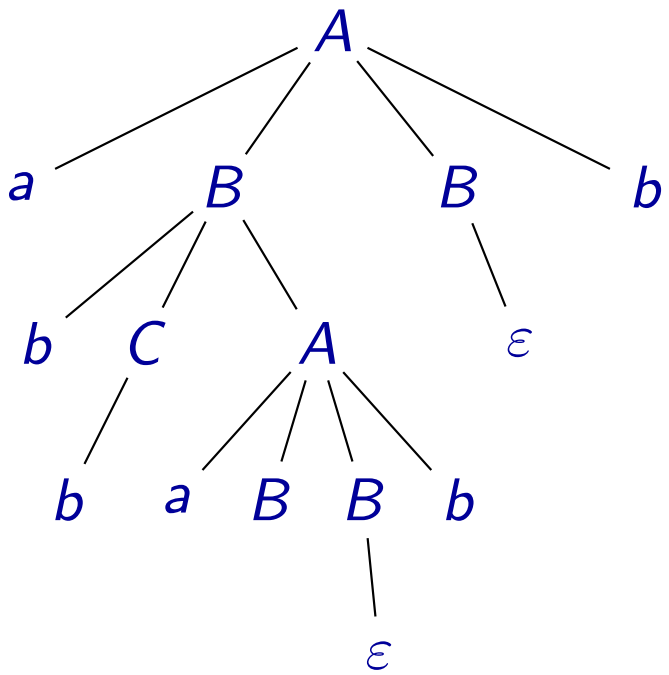
$A \to aBBb \mid AaA$
$\underline{B} \to \underline{\varepsilon} \mid bCA$
$C \to AB \mid a \mid b$



$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow abCaBbBb \Rightarrow abbaBb\underline{B}b \Rightarrow abbaBbb$

Derivační strom

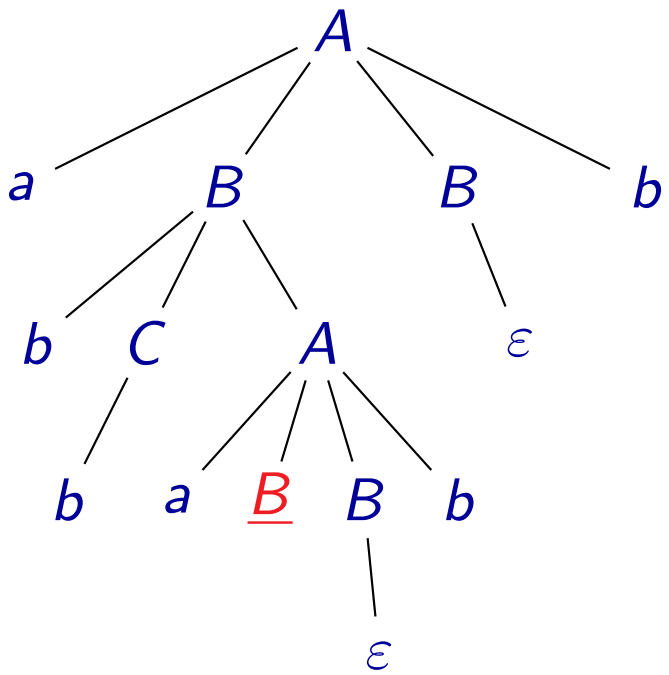
$A \to aBBb \mid AaA$
$B \to \varepsilon \mid bCA$
$C \to AB \mid a \mid b$



$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow abCaBbBb \Rightarrow abbaBbBb \Rightarrow abbaBbb$

Derivační strom

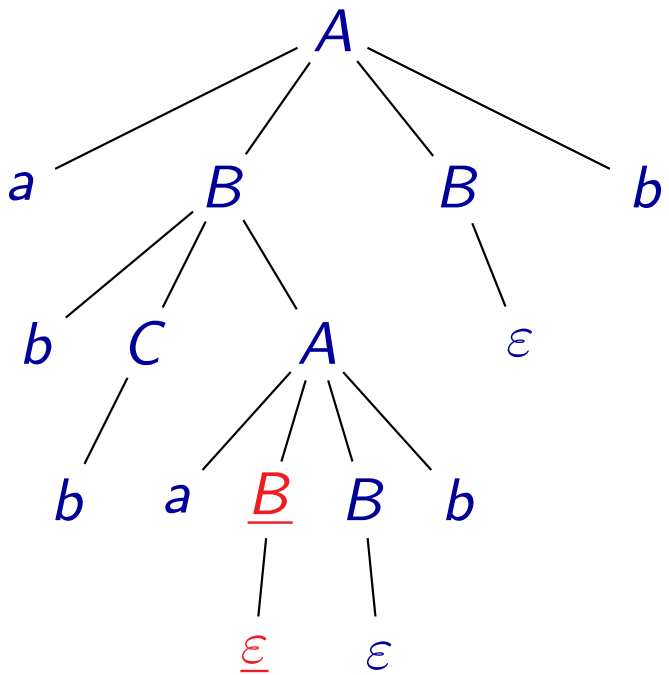
$A \to aBBb \mid AaA$
$\underline{B} \to \varepsilon \mid bCA$
$C \to AB \mid a \mid b$



$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow abCaBbBb \Rightarrow abbaBbBb \Rightarrow abba\underline{B}bb$

Derivační strom

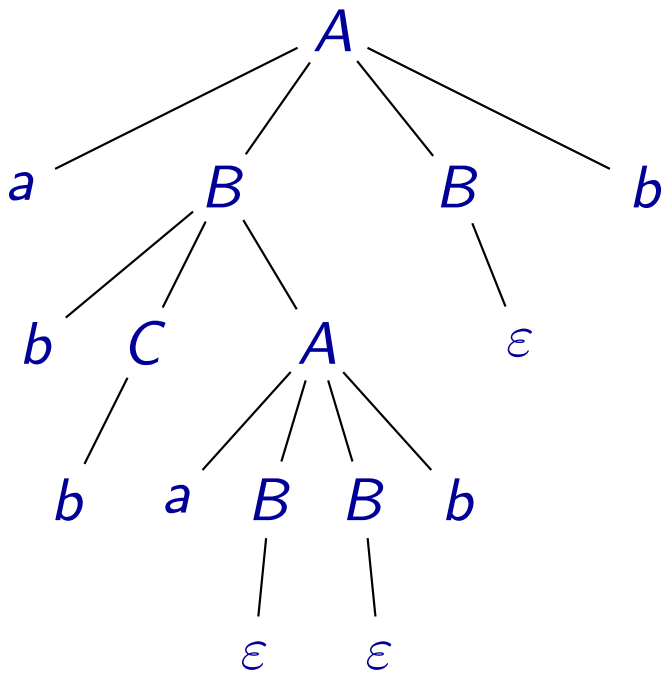
$A \to aBBb \mid AaA$
$\underline{B} \to \underline{\varepsilon} \mid bCA$
$C \to AB \mid a \mid b$



$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow abCaBbBb \Rightarrow abbaBbBb \Rightarrow abba\underline{B}bb \Rightarrow abbabb$

Derivační strom

$A \to aBBb \mid AaA$
$B \to \varepsilon \mid bCA$
$C \to AB \mid a \mid b$



$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow abCaBbBb \Rightarrow abbaBbBb \Rightarrow abbaBbb \Rightarrow abbabb$

Derivační strom

Každé derivaci odpovídá nějaký **derivační strom**:

- Vrcholy stromu jsou ohodnoceny terminály a neterminály.
- Kořen stromu je ohodnocen počátečním neterminálem.
- Listy stromu jsou ohodnoceny terminály nebo symboly ε.
- Ostatní vrcholy stromu jsou ohodnoceny neterminály.
- Pokud je vrchol ohodnocen neterminálem A, pak jeho potomci jsou ohodnoceni symboly pravé strany nějakého přepisovacího pravidla $A \to \alpha$.

Levá a pravá derivace

$$E \to E + E \mid E * E \mid (E) \mid a$$

Levá derivace je derivace, ve které v každém kroku nahrazujeme vždy nejlevější neterminál.

$$\underline{E} \Rightarrow \underline{E} + E \Rightarrow \underline{E} * E + E \Rightarrow a * \underline{E} + E \Rightarrow a * a + \underline{E} \Rightarrow a * a + a$$

Pravá derivace je derivace, ve které v každém kroku nahrazujeme vždy nejpravější neterminál.

$$\underline{E} \Rightarrow E + \underline{E} \Rightarrow \underline{E} + a \Rightarrow E * \underline{E} + a \Rightarrow \underline{E} * a + a \Rightarrow a * a + a$$

Derivace však nemusí být ani levá ani pravá:

$$\underline{E} \Rightarrow \underline{E} + E \Rightarrow E * \underline{E} + E \Rightarrow E * a + \underline{E} \Rightarrow \underline{E} * a + a \Rightarrow a * a + a$$

Levá a pravá derivace

- Jednomu derivačnímu stromu může odpovídat více různých derivací.
- Každému derivačnímu stromu odpovídá právě jedna levá a právě jedna pravá derivace.

Ekvivalence gramatik

Gramatiky G_1 a G_2 jsou **ekvivalentní**, jestliže generují tentýž jazyk, tj. jestliže $L(G_1) = L(G_2)$.

Poznámka: Problém ekvivalence bezkontextových gramatik je algoritmicky nerozhodnutelný. Dá se dokázat, že není možné vytvořit algoritmus, který by pro libovolné dvě bezkontextové gramatiky rozhodl, zda jsou ekvivalentní či ne.

Dokonce je algoritmicky nerozhodnutelný i problém, zda gramatika generuje jazyk Σ^*.

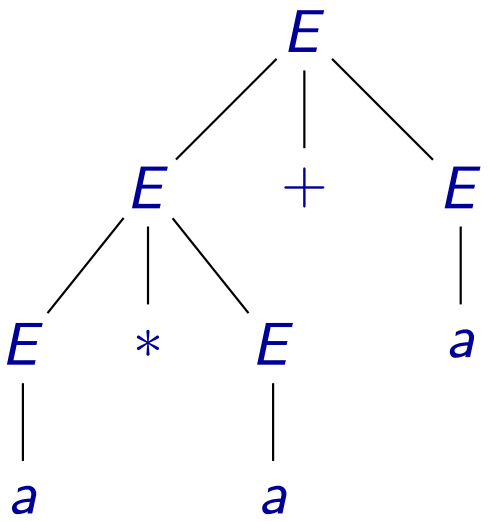
Nejednoznačné gramatiky

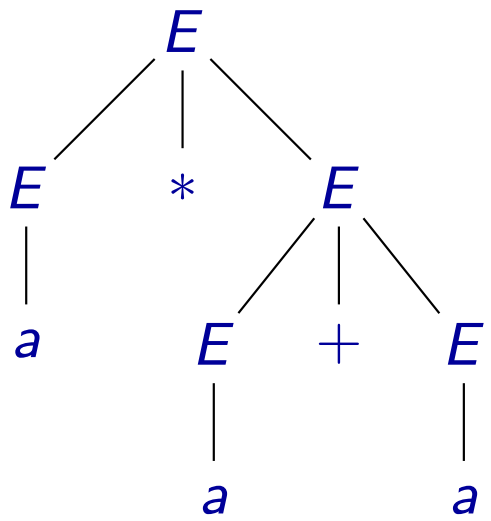
Gramatika G je **nejednoznačná**, jestliže existuje nějaké slovo $w \in L(G)$, kterému přísluší dva různé derivační stromy, resp. dvě různé levé či dvě různé pravé derivace.

Příklad:

$E \Rightarrow E + E \Rightarrow E * E + E \Rightarrow a * E + E \Rightarrow a * a + E \Rightarrow a * a + a$

$E \Rightarrow E * E \Rightarrow E * E + E \Rightarrow a * E + E \Rightarrow a * a + E \Rightarrow a * a + a$





Nejednoznačné gramatiky

Někdy je možné nejednoznačnou gramatiku nahradit gramatikou, která generuje tentýž jazyk, ale není nejednoznačná.

Příklad: Gramatiku

$$E \to E + E \mid E * E \mid (E) \mid a$$

můžeme nahradit ekvivalentní gramatikou

$$\begin{aligned} E &\to T \mid T + E \\ T &\to F \mid F * T \\ F &\to a \mid (E) \end{aligned}$$

Poznámka: Pokud se nejednoznačná gramatika žádnou ekvivalentní jednoznačnou gramatikou nahradit nedá, říkáme, že je **podstatně nejednoznačná**.

Bezkontextové jazyky

Definice

Jazyk L je **bezkontextový**, jestliže existuje bezkontextová gramatika G taková, že $L = L(G)$.

Třída bezkontextových jazyků je uzavřená vůči:

- zřetězení
- sjednocení
- iteraci

Třída bezkontextových jazyků však není uzavřená vůči:

- doplňku
- průniku

Bezkontextové jazyky

Máme dány gramatiky $G_1 = (\Pi_1, \Sigma, S_1, P_1)$ a $G_2 = (\Pi_2, \Sigma, S_2, P_2)$, přičemž můžeme předpokládat, že $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \emptyset$ a $S \notin \Pi_1 \cup \Pi_2$.

- Gramatika G taková, že $L(G) = L(G_1)L(G_2)$:

$$G = (\Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \{S\}, \Sigma, S, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 S_2\})$$

- Gramatika G taková, že $L(G) = L(G_1) \cup L(G_2)$:

$$G = (\Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \{S\}, \Sigma, S, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1, S \to S_2\})$$

- Gramatika G taková, že $L(G) = L(G_1)^*$:

$$G = (\Pi_1 \cup \{S\}, \Sigma, S, P_1 \cup \{S \to \varepsilon, S \to S_1 S\})$$