Cvičení 5

Příklad 1: Následující formule převeďte do KNF a DNF:

1. $p \wedge \neg r \wedge s$
2. $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (r \wedge q)$

   Řešení: Formule již je v DNF. KNF může být třeba $(p \vee r) \wedge (p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge q \wedge (\neg r \vee q)$ nebo $(p \vee r) \wedge q$ aj.
3. $p \rightarrow (q \wedge r)$
4. $p \leftrightarrow q$
5. $((p \rightarrow \neg q) \rightarrow r) \wedge \neg p$
6. $((p \wedge (q \vee r)) \vee (q \rightarrow \neg r)$

   Řešení: DNF: $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee \neg q \vee \neg r$ nebo také $\neg q \vee p \vee \neg r$, která je současně i v KNF

Příklad 2: Pomocí ekvivalentních úprav u následujících formulí rozhodněte, o jakou formuli se jedná (splnitelná, tautologie, kontradikce).

1. $((p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg p \rightarrow (q \vee p)))$

   Řešení: $\ldots \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \rightarrow (p \vee q \vee p) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \rightarrow (q \vee p) \Leftrightarrow (q \vee p) \vee (\neg p \vee q) \Leftrightarrow q \vee p \vee \neg p \vee q \Leftrightarrow q \vee \top \vee q \Leftrightarrow \top$
   Tautologie.
2. $\big((p \vee \neg q) \wedge \neg(p \wedge q)\big) \rightarrow (\neg p \vee q)$
3. $\neg\big((q \wedge p) \rightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \vee q))\big)$
4. $\big((p \vee \neg(p \wedge q)) \rightarrow (\neg p \vee q \vee p)\big) \rightarrow (p \leftrightarrow \neg q)$

   Řešení: $\ldots \Leftrightarrow \big([p \vee (\neg p \vee \neg q)] \rightarrow \top\big) \rightarrow (p \leftrightarrow \neg q) \Leftrightarrow \top \rightarrow (p \leftrightarrow \neg q) \Leftrightarrow (p \leftrightarrow \neg q) \vee \bot \Leftrightarrow p \leftrightarrow \neg q \Leftrightarrow (p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \vee \neg p) \wedge (q \vee p) \Leftrightarrow [\neg q \wedge (q \vee p)] \vee [\neg p \wedge (q \vee p)] \Leftrightarrow [(\neg q \wedge q) \vee (\neg q \wedge p)] \vee [(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge p)] \Leftrightarrow (\neg q \wedge p) \vee (\neg p \wedge q)$
   Splnitelná.

Příklad 3: Následující formule převeďte do ÚKNF a ÚDNF pomocí tabulky nebo ekvivalentních úprav.

1. $(p \leftrightarrow \neg q)$

   Řešení:

p	**q**	$\neg$**q**	**p** $\leftrightarrow \neg$**q**	**UEK**	**UED**
0	0	1	0		$p \vee q$
0	1	0	1	$\neg p \wedge q$	
1	0	1	1	$p \wedge \neg q$	
1	1	0	0		$\neg p \vee \neg q$

   UKNF: $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$
   UDNF: $(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$

$(p \leftrightarrow \neg q) \Leftrightarrow (p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg \mathbf{q} \vee \neg \mathbf{p}) \wedge (\mathbf{q} \vee \mathbf{p}) \Leftrightarrow \big(\neg q \wedge (q \vee p)\big) \vee (\neg p \wedge (q \vee p)\big) \Leftrightarrow \big((\neg q \wedge q) \vee (\neg q \wedge p)\big) \vee \big((\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge p)\big) \Leftrightarrow (\neg \mathbf{q} \wedge \mathbf{p}) \vee (\neg \mathbf{p} \wedge \mathbf{q})$

2. $(p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg p \rightarrow (q \vee p))$
3. $\big((p \rightarrow q) \wedge (\neg r \rightarrow \neg q)\big) \wedge \neg r \wedge p$

Příklad 4: Pro každou z následujících sekvencí symbolů rozhodněte, zda se jedná o a) term, b) formuli predikátové logiky 1. řádu. Pokud se jedná o formuli predikátové logiky 1. řádu, určete, zda je tato formule i) atomická, ii) uzavřená; pokud není formule uzavřená, určete množinu volných proměnných, které se v ní vyskytují.

Berte jako dané, že použitá signatura je $(\mathcal{P}, \mathcal{F}, \mathcal{C}, \mathsf{arity})$, kde $\mathcal{P} = \{P, Q, R\}$ je množina predikátových symbolů, $\mathcal{F} = \{f, g\}$ je množina funkčních symbolů a $\mathcal{C} = \{c, d\}$ je množina konstatních symbolů, přičemž $\mathsf{arity}(P) = 1$, $\mathsf{arity}(Q) = 2$, $\mathsf{arity}(R) = 2$, $\mathsf{arity}(f) = 1$ a $\mathsf{arity}(g) = 2$.

Poznámka: Používejte běžné konvence o vypouštění závorek.

1. $(\neg((\neg p) \rightarrow (\neg(\neg r))))$

   Řešení: Není formule PL1 ani term
2. $\forall x \in A : P$
3. $f(c)$

   Řešení: Není formule PL1, je to term
4. $R(c, d)$

   Řešení: Je uzavřená a atomická
5. $\forall x \exists y P(c)$
6. $\forall x \exists x P(x)$
7. $\forall x \exists y P(R(x, y))$
8. $\forall x \exists y f(R(x, y))$
9. $\forall x \exists y P(g(x, y))$

   Řešení: Je uzavřená, není atomická
10. $\forall x \exists y f(g(x, y))$
11. $\forall x \exists y P(g(f(f(x)), c))$
12. $\forall x(P(d) \wedge \exists y Q(y, c))$
13. $P(d) \wedge \exists y Q(y, c)$
14. $P(x) \wedge \exists y Q(d, c)$

    Řešení: Je otevřená, není atomická, volná proměnná je jen x
15. $\forall x \exists y(R(x, f(y)) \leftrightarrow \exists z Q(z, c))$
16. $\forall x P(g(x))$
17. $\forall x R(f(x))$
18. $\forall x R(f(x), f(x), f(x))$
19. $\forall x P(f(x, x))$
20. $\forall x P(g(x, x))$
21. $f(f(g(c, d)))$
22. $P(f(g(c, d)))$
23. $P(f(d)) \rightarrow \forall x P(x)$
24. $P(f(g(f, f)))$
25. $P(f(g(c, x)))$
26. $\forall x(f(x) \rightarrow g(c, x))$
27. $\forall x P(f(x) \rightarrow g(c, x))$
28. $\forall x P(\neg f(x))$
29. $\forall x \neg P(f(x))$
30. $\neg(P(f(x)) \vee Q(y, z))$

U sekvencí symbolů, které jsou termem nebo formulí, nakreslete příslušný abstraktní syntaktický strom.

Příklad 5: Vezměme si signaturu $(\mathcal{P}, \mathcal{F}, \mathcal{C}, \mathsf{arity})$, kde $\mathcal{P} = \{P, Q, R\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$, $\mathcal{C} = \{c, d\}$, přičemž $\mathsf{arity}(P) = 1$, $\mathsf{arity}(Q) = 1$, $\mathsf{arity}(R) = 2$, $\mathsf{arity}(f) = 2$, $\mathsf{arity}(g) = 1$.

Pro každou z následujících formulí a každou z následujícících interpretací s valuací, určete, zda je daná formule pravdivá v dané interpretaci a valuaci.

Formule:

1. $R(c,d)$
2. $R(c,d) \to R(c,x)$
3. $\forall x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z))$
4. $\exists x (Q(x) \wedge \forall y R(y, g(x)))$
5. $\exists x \neg P(f(x,y))$
6. $\forall x \exists y \neg R(x, g(g(y)))$

Interpretace:

a) Univerzem je množina $A = \{a,b,c\}$. Funkce $\bar{f}$ a $\bar{g}$ přiřazené funkčním symbolům f a g jsou dány následujícími tabulkami:

$\bar{f}$	a	b	c
a	b	a	c
b	b	b	b
c	a	c	b

x	$\bar{g}(x)$
a	b
b	c
c	c

Konstantám c a d jsou přiřazeny prvky a a b. Predikátu P je přiřazena relace $\{a,c\}$, predikátu Q relace $\emptyset$ a predikátu R relace $\{(a,b), (b,c), (a,c)\}$.

Předpokládejme valuaci v, kde $v(x) = c$, $v(y) = a$ a $v(z) = a$.

Řešení: Zdůvodnění v závorkách jsou jen nepřesná, neformální.

1) ano ((a,b) je v relaci přiřazené R)
2) ano (obě strany implikace jsou pravdivé)
3) ano (relace přiřazená R je tranzitivní)
4) ne (už $Q(x)$ není pravda pro žádné x)
5) ano (např. pro $x = b$ je $f(b,a) = b$ a b není v množině přiřazené P)
6) ne ($g(g(y)) = c$ pro každé y, tedy pro $x = b$ je bez ohledu na y vždy (b,c) v relaci přiřazené R)

b) Univerzem je množina přirozených čísel $\mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$.

- Funkčnímu symbolu f je přiřazena funkce $\bar{f} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kde $\bar{f}(x,y) = x + y$.
- Funkčnímu symbolu g je přiřazena funkce $\bar{g} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kde $\bar{g}(x) = x + 1$.
- Konstantám c a d jsou přiřazeny prvky 0 a 2.
- Predikátovému symbolu P je přiřazena relace $\{x \in \mathbb{N} \mid x \bmod 2 = 0\}$.
- Predikátovému symbolu Q je přiřazena relace $\{x \in \mathbb{N} \mid x = y^2 \text{ pro nějaké } y \in \mathbb{N}\}$.
- Predikátovému symbolu R je přiřazena relace $\{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x < y\}$.

Předpokládejme valuaci v, kde $v(x) = 7$, $v(y) = 2$, $v(z) = 9$.

Příklad 6: Pro každou z následujících formulí najděte nějakou interpretaci, která je jejím modelem, a nějakou interpretaci, která jejím modelem není.

1. $\forall x \big((P(x) \wedge Q(x,a)) \to R(x) \big)$

   Řešení:

$U = \mathbb{R}$		
$P^U \subseteq \mathbb{R}$	:	být celé číslo
$Q^U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$	:	být ostře menší než
$R^U \subseteq \mathbb{R}$	:	být záporný
$a^U \in \mathbb{R}$	:	číslo 0

2. $\forall x\big(P(a, x) \to Q(x)\big)$
3. $\exists x\big(P(x) \wedge \neg Q(x)\big)$
4. $\forall x\big(P(x) \to \neg Q(x)\big)$
5. $\exists x\big(P(x) \wedge Q(x)\big)$
6. $\exists x\big(P(x, f(x))\big)$

   Řešení:

$U = \mathbb{N}$		
$P^U \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$	:	být větší nebo rovno ($\geq$)
$f^U : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$	:	druhá mocnina

7. $\forall x \exists y\big(P(x) \to \neg R(x, y)\big)$