Formule výrokové logiky

- **Syntaxe** — jak vypadají formule výrokové logiky
- **Sémantika** — přiřazuje formulím a jednotlivým symbolům, které se v nich vyskytují, přesně definovaný význam

Syntaxe formulí výrokové logiky

Formule — posloupnosti symbolů z určité **abecedy**:

- **atomické výroky** — například symboly "p", "q", "r", apod.
- **logické spojky** — symboly "$\neg$", "$\wedge$", "$\vee$" "$\rightarrow$" a "$\leftrightarrow$"
- **závorky** — symboly "$($" a "$)$"

Ne každá posloupnost těchto symbolů je formulí.

Například toto formule není:

$$\wedge\vee)p\neg((\neg$$

Syntaxe formulí výrokové logiky

Definice

Dobře utvořené **formule výrokové logiky** jsou posloupnosti symbolů vytvořené podle následujících tří pravidel:

1. Jestliže p je atomický výrok, pak p je dobře utvořená formule.
2. Jestliže φ a ψ jsou dobře utvořené formule, pak i $(\neg\varphi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ a $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ jsou dobře utvořené formule.
3. Neexistují žádné další dobře utvořené formule než ty, které jsou vytvořené pomocí předchozích dvou pravidel.

Syntaxe formulí výrokové logiky

Příklady dobře utvořených formulí:

- q
- $(\neg q)$
- r
- $((\neg q) \rightarrow r)$
- p
- $(p \leftrightarrow r)$
- $(\neg(p \leftrightarrow r))$
- $(((\neg q) \rightarrow r) \wedge (\neg(p \leftrightarrow r)))$

Příklad sekvence symbolů, která není dobře utvořenou formulí:

- $(p \wedge \vee q)$

Syntaxe formulí výrokové logiky

Formule ψ je **podformulí** formule φ, jestliže platí alespoň jedna z následujících možností:

- Formule ψ je stejná jako formule φ (tj. jedná se o jednu a tutéž formuli).
- Pokud je formule φ tvaru $(\neg\chi)$, tak ψ je podformulí formule χ.
- Pokud je formule φ tvaru $(\chi_1 \wedge \chi_2)$, $(\chi_1 \vee \chi_2)$, $(\chi_1 \rightarrow \chi_2)$ nebo $(\chi_1 \leftrightarrow \chi_2)$, tak ψ je podformulí formule χ_1 nebo podformulí formule χ_2.

Příklad: Podformule formule $((\neg(p \wedge q)) \leftrightarrow r)$:

$$p \qquad q \qquad r \qquad (p \wedge q) \qquad (\neg(p \wedge q)) \qquad ((\neg(p \wedge q)) \leftrightarrow r)$$

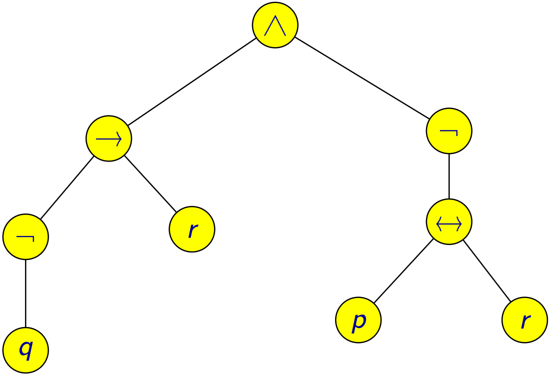
Syntaxe formulí výrokové logiky

Alternativní symboly pro logické spojky:

Log. spojka	Symbol	Alternativní symboly
negace	$\neg$	$\sim$
konjunkce	$\wedge$	$\&$
implikace	$\rightarrow$	$\Rightarrow$, $\supset$
ekvivalence	$\leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$, $\equiv$

Syntaxe formulí výrokové logiky

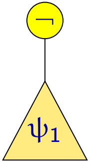
Abstraktní syntaktický strom formule $(((\neg q) \to r) \wedge (\neg (p \leftrightarrow r)))$:



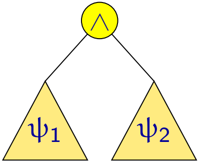
Syntaxe formulí výrokové logiky

p

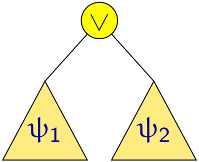
$(\neg\psi_1)$



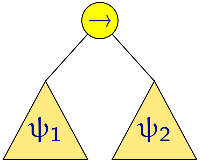
$(\psi_1 \wedge \psi_2)$



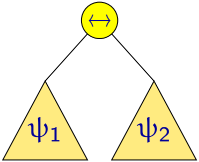
$(\psi_1 \vee \psi_2)$



$(\psi_1 \rightarrow \psi_2)$



$(\psi_1 \leftrightarrow \psi_2)$



Syntaxe formulí výrokové logiky

Arita logických spojek:

- **unární** spojka (arita 1): $\neg$
- **binární** spojky (arita 2): $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

Syntaxe formulí výrokové logiky

Konvence pro vypouštění závorek:

- Vnější závorky je možno vypustit.
- Priorita logických spojek (od nejvyšší po nejnižší):

$$\neg \qquad \wedge \qquad \vee \qquad \rightarrow \qquad \leftrightarrow$$

- Místo $\neg(\neg\varphi)$ je možno psát $\neg\neg\varphi$.

Příklad: Místo $((\neg p) \wedge (r \rightarrow (q \vee s)))$ je možno psát

$$\neg p \wedge (r \rightarrow q \vee s)$$

Poznámka: Další konvence budou uvedeny později.

Sémantika výrokové logiky

At — množina atomických výroků

Například

- $At = \{p, q, r\}$, nebo
- $At = \{p_0, p_1, p_2, \ldots\}$

Definice

Pravdivostní ohodnocení je přiřazení pravdivostních hodnot (tj. hodnot z množiny $\{0, 1\}$) všem atomickým výrokům z množiny At.
(Formálně je možné pravdivostní ohodnocení definovat jako funkci $v : At \to \{0, 1\}$.)

Příklad: Pravdivostní ohodnocení v pro $At = \{p, q, r\}$, kde

$$v(p) = 1 \qquad v(q) = 0 \qquad v(r) = 1$$

Sémantika výrokové logiky

Pokud je množina At konečná a obsahuje n atomických výroků, existuje celkem 2^n pravdivostních ohodnocení.

Příklad: $At = \{p, q, r\}$

$$
\begin{array}{llll}
v_0: & v_0(p) = 0, & v_0(q) = 0, & v_0(r) = 0 \\
v_1: & v_1(p) = 0, & v_1(q) = 0, & v_1(r) = 1 \\
v_2: & v_2(p) = 0, & v_2(q) = 1, & v_2(r) = 0 \\
v_3: & v_3(p) = 0, & v_3(q) = 1, & v_3(r) = 1 \\
v_4: & v_4(p) = 1, & v_4(q) = 0, & v_4(r) = 0 \\
v_5: & v_5(p) = 1, & v_5(q) = 0, & v_5(r) = 1 \\
v_6: & v_6(p) = 1, & v_6(q) = 1, & v_6(r) = 0 \\
v_7: & v_7(p) = 1, & v_7(q) = 1, & v_7(r) = 1
\end{array}
$$

Sémantika výrokové logiky

Formule φ má při pravdivostním ohodnocení v pravdivostní hodnotu 1:

$$v \models \varphi$$

Formule φ má při pravdivostním ohodnocení v pravdivostní hodnotu 0:

$$v \not\models \varphi$$

Sémantika výrokové logiky

Definice

Pravdivostní hodnoty formulí výrokové logiky při daném pravdivostním ohodnocení v jsou definovány následujícím způsobem:

- Pro atomický výrok p platí $v \models p$ právě tehdy, když $v(p) = 1$. (Pokud je tedy $v(p) = 0$, tak $v \not\models p$.)
- $v \models \neg\varphi$ právě tehdy, když $v \not\models \varphi$.
- $v \models \varphi \wedge \psi$ právě tehdy, když $v \models \varphi$ a $v \models \psi$.
- $v \models \varphi \vee \psi$ právě tehdy, když $v \models \varphi$ nebo $v \models \psi$.
- $v \models \varphi \rightarrow \psi$ právě tehdy, když $v \not\models \varphi$ nebo $v \models \psi$.
- $v \models \varphi \leftrightarrow \psi$ právě tehdy, když $v \models \varphi$ a $v \models \psi$, nebo když $v \not\models \varphi$ a $v \not\models \psi$.

Sémantika výrokové logiky

φ	$\neg\varphi$
0	1
1	0

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \rightarrow \psi$	$\varphi \leftrightarrow \psi$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Sémantika výrokové logiky

Příklad: $At = \{p, q, r\}$
pravdivostní ohodnocení v, kde $v(p) = 1$, $v(q) = 0$ a $v(r) = 1$

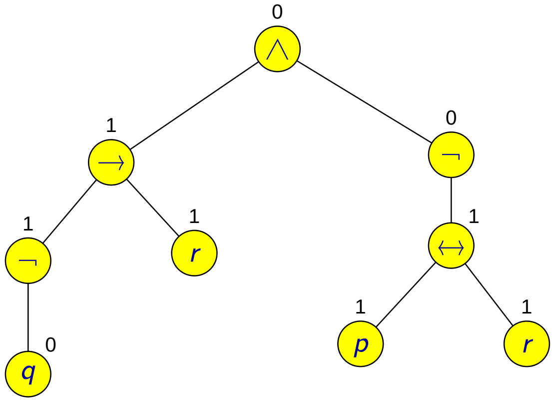
- $v \not\models q$
- $v \models \neg q$
- $v \models r$
- $v \models \neg q \rightarrow r$
- $v \models p$
- $v \models p \leftrightarrow r$
- $v \not\models \neg(p \leftrightarrow r)$
- $v \not\models (\neg q \rightarrow r) \wedge \neg(p \leftrightarrow r)$

p	q	r	$\neg q$	$\neg q \rightarrow r$	$p \leftrightarrow r$	$\neg(p \leftrightarrow r)$	φ
1	0	1	1	1	1	0	0

$\varphi := (\neg q \rightarrow r) \wedge \neg(p \leftrightarrow r)$

Sémantika výrokové logiky

$(\neg q \rightarrow r) \wedge \neg(p \leftrightarrow r)$



Sémantika výrokové logiky

$\varphi := (\neg q \rightarrow r) \wedge \neg(p \leftrightarrow r)$

p	q	r	$\neg q$	$\neg q \rightarrow r$	$p \leftrightarrow r$	$\neg(p \leftrightarrow r)$	φ
0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	1	1	0	0

Ohodnocení, při kterých je formule pravdivá se nazývají **modely**:

$$\begin{array}{llll} v_1: & v_1(p) = 0, & v_1(q) = 0, & v_1(r) = 1, \\ v_3: & v_3(p) = 0, & v_3(q) = 1, & v_3(r) = 1, \\ v_6: & v_6(p) = 1, & v_6(q) = 1, & v_6(r) = 0, \end{array}$$

Tautologie

Definice

Formule φ je **tautologie**, jestliže pro každé pravdivostní ohodnocení v platí $v \models \varphi$ (tj. pokud φ je pravdivá při každém pravdivostním ohodnocení).

Příklad: *„Jestliže venku prší, tak venku prší."*

$$p \rightarrow p$$

Příklad: *„Dnes je pátek nebo dnes není pátek."*

$$q \vee \neg q$$

Tautologie

Příklad komplikovanější tautologie:

$$(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p)$$

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q$	$p \rightarrow \neg q$	$\neg p$	$(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p$	φ
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1	1

Tautologie

Důležité jsou zejména tautologie tvaru $\varphi \rightarrow \psi$ nebo $\varphi \leftrightarrow \psi$
— dají se použít pro logické vyvozování:

- Pokud platí $\varphi \rightarrow \psi$ a zároveň platí φ, musí platit i ψ.

  Speciálně, pokud $\varphi \rightarrow \psi$ je tautologie, z platnosti φ se dá vyvodit, že platí i ψ.

  Příklad: $(p \wedge q) \rightarrow p$ je tautologie.

  Pokud platí $p \wedge q$, tak platí i p.

  Příklad: $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ je tautologie.

  Pokud platí $p \rightarrow q$ a zároveň platí $\neg q$, tak platí $\neg p$.

Tautologie

- Pokud platí $\varphi \leftrightarrow \psi$ a zároveň platí φ, musí platit i ψ.
  Podobně, pokud platí $\varphi \leftrightarrow \psi$ a zároveň platí ψ, musí platit i φ.

  Příklad: $(\neg p \rightarrow q) \leftrightarrow (q \vee p)$ je tautologie.

  - Pokud platí $\neg p \rightarrow q$, tak musí platit i $q \vee p$.
  - Pokud platí $q \vee p$, tak musí platit i $\neg p \rightarrow q$.

Tautologie

Pokud v tautologii φ nahradíme jednotlivé atomické výroky libovolnými formulemi, dostaneme opět tautologii.

Příklad: Formule $p \rightarrow (p \vee q)$ je tautologie.

Pro libovolné formule ψ a χ proto platí, že

$$\psi \rightarrow (\psi \vee \chi)$$

je tautologie.

Náhrada atomických výroků:

- p nahradíme $q \vee \neg(r \rightarrow \neg s)$
- q nahradíme $\neg\neg(q \leftrightarrow p)$

Dostaneme tautologii

$$(q \vee \neg(r \rightarrow \neg s)) \rightarrow ((q \vee \neg(r \rightarrow \neg s)) \vee \neg\neg(q \leftrightarrow p))$$

Kontradikce

Definice

Formule φ je **kontradikce**, jestliže pro každé pravdivostní ohodnocení v platí $v \not\models \varphi$ (tj. pokud φ je při každém pravdivostním ohodnocení nepravdivá).

Příklad: *„Dnes je středa a dnes není středa."*

$$p \wedge \neg p$$

- φ je tautologie právě tehdy, když $\neg\varphi$ je kontradikce
- φ je kontradikce právě tehdy, když $\neg\varphi$ je tautologie

Splnitelné formule

Definice

Formule φ je **splnitelná**, jestliže existuje alespoň jedno pravdivostní ohodnocení v, pro které je $v \models \varphi$.

- Formule je splnitelná právě tehdy, když není kontradikcí.
- Každá tautologie je splnitelná, ale ne každá splnitelná formule je tautologie.

Příklad: Formule, která je splnitelná, ale není tautologie:

$$(p \vee q) \rightarrow p$$

- Například při ohodnocení v_1, kde $v_1(p) = 1$ a $v_1(q) = 0$, je pravdivá.
- Při ohodnocení v_2, kde $v_2(p) = 0$ a $v_2(q) = 1$, je nepravdivá.

Splnitelné formule

- φ je tautologie právě tehdy, když $\neg\varphi$ není splnitelná
- φ je splnitelná právě tehdy, když $\neg\varphi$ není tautologie

- **Splnitelná formule**:
  - Abychom ukázali, že formule **je** splnitelná, stačí najít ohodnocení, při kterém je pravdivá.
  - Abychom ukázali, že formule **není** splnitelná, je třeba ukázat, že neexistuje žádné ohodnocení, při kterém by byla pravdivá.

Tautologie a kontradikce

- **Tautologie**:
  - Abychom ukázali, že formule **není** tautologie, stačí najít ohodnocení, při kterém není pravdivá.
  - Abychom ukázali, že formule **je** tautologie, je třeba ukázat, že neexistuje žádné ohodnocení, při kterém není pravdivá.
- **Kontradikce**:
  - Abychom ukázali, že formule **není** kontradikce, stačí najít ohodnocení, při kterém je pravdivá.
  - Abychom ukázali, že formule **je** kontradikce, je třeba ukázat, že neexistuje žádné ohodnocení, při kterém by byla pravdivá.

Sémantický spor

Při zdůvodňování toho, že formule φ je/není tautogie (resp. kontradikce, splnitelná) můžeme použít tabulkovou metodu.

Většinou není potřeba vytvářet celou tabulku, ale stačí se soutředit na „zajímavé“ případy.

- Můžeme si nakreslit syntaktický strom dané formule a zkusit přiřadit vrcholům hodnoty 0 a 1.

Například pro zjištění toho, zda formule je/není tautologie:

- Nejprve přiřadíme kořeni hodnotu 0.
- Postupně přiřazujeme dalším vrcholům hodnoty, které jsou vynuceny dříve přiřazenými hodnotami.
- Pokud se podaří celý strom konzistentně ohodotit, máme ohodnocení, při kterém formule není pravdivá.
- Pokud zjistíme, že žádné takové ohodnocení nemůže existovat, daná formule je tautologie.

Sémantický spor

- Stejné podstromy musí být ohodnoceny stejně — stejné podformule musí mít stejné pravdivostní hodnoty.
- Pokud má být nějaký vrchol ohodnocen 0 i 1, máme **spor** — takové ohodnocení nemůže existovat.
- Někdy je nutné se vracet a zkoušet více možností přiřazení — případy, kdy aktuálně přiřazené hodnoty nevynucují jednoznačné přiřazení hodnoty nějakému dosud neohodnocenému vrcholu.

Sémantický spor

Příklad:

- $(p \rightarrow (q \vee r)) \vee (p \rightarrow r)$ (není tautologie)

  $\langle$*řešení na tabuli*$\rangle$

- $(p \leftrightarrow (\neg q \vee r)) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$ (je tautologie)

  $\langle$*řešení na tabuli*$\rangle$

- $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \vee (\neg p \wedge q)$ (není tautologie)

  $\langle$*řešení na tabuli*$\rangle$

Ekvivalence formulí

Definice

Formule φ a ψ jsou **logicky ekvivalentní**, jestliže pro každé pravdivostní ohodnocení v platí, že φ a ψ mají při ohodnocení v stejnou pravdivostní hodnotu, tj.

$$v \models \varphi \qquad \text{právě tehdy, když} \qquad v \models \psi.$$

To, že formule φ a ψ jsou logicky ekvivalentní, se označuje zápisem

$$\varphi \Leftrightarrow \psi.$$

Formule φ a ψ jsou logicky ekvivalentní právě tehdy, když $\varphi \leftrightarrow \psi$ je tautologie.

Ekvivalence formulí

Příklad: $\neg(p \rightarrow q) \quad \Leftrightarrow \quad p \wedge \neg q$

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg(p \rightarrow q)$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$
0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0

Ekvivalence formulí

Pro zdůvodnění toho, že formule φ a ψ **nejsou** ekvivalentní, stačí najít jedno ohodnocení v takové, že buď:

- $v \models \varphi$ a $v \not\models \psi$, nebo
- $v \not\models \varphi$ a $v \models \psi$.

Příklad: $p \vee (q \wedge r)$ není ekvivalentní $(p \vee q) \wedge r$

Ohodnocení v, kde:

- $v(p) = 1$
- $v(q) = 1$
- $v(r) = 0$

Při tomto ohodnocení platí $p \vee (q \wedge r)$, ale neplatí $(p \vee q) \wedge r$.

Některé důležité ekvivalence

– Ekvivalence týkající se negace:

$\neg\neg p \Leftrightarrow p$ *dvojitá negace*

– Ekvivalence týkající se konjunkce:

$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ *asociativita*

$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ *komutativita*

$p \wedge p \Leftrightarrow p$ *idempotence*

– Ekvivalence týkající se disjunkce:

$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ *asociativita*

$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ *komutativita*

$p \vee p \Leftrightarrow p$ *idempotence*

Některé důležité ekvivalence

– Distributivní zákony pro $\wedge$ a $\vee$:

$$p \wedge (q \vee r) \;\Leftrightarrow\; (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
$$p \vee (q \wedge r) \;\Leftrightarrow\; (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

– De Morganovy zákony:

$$\neg(p \wedge q) \;\Leftrightarrow\; \neg p \vee \neg q$$
$$\neg(p \vee q) \;\Leftrightarrow\; \neg p \wedge \neg q$$

– Ekvivalence týkající se implikace:

$$p \rightarrow q \;\Leftrightarrow\; \neg p \vee q$$
$$\neg(p \rightarrow q) \;\Leftrightarrow\; p \wedge \neg q$$

Některé důležité ekvivalence

– Ekvivalence týkající se spojky $\leftrightarrow$:

$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \;\Leftrightarrow\; p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$	*asociativita*
$p \leftrightarrow q \;\Leftrightarrow\; q \leftrightarrow p$	*komutativita*
$p \leftrightarrow q \;\Leftrightarrow\; (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	
$p \leftrightarrow q \;\Leftrightarrow\; (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$	
$p \leftrightarrow q \;\Leftrightarrow\; (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$	

Ekvivalence formulí

Řekněme, že formule φ a ψ jsou logicky ekvivalentní, tj.

$$\varphi \Leftrightarrow \psi .$$

Pokud ve φ a ψ nahradíme jednotlivé atomické výroky libovolnými formulemi (v obou stejně), dostaneme opět ekvivalentní formule.

Příklad: $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

Pro libovolné formule χ_1 a χ_2 proto platí

$$\neg(\chi_1 \vee \chi_2) \Leftrightarrow \neg\chi_1 \wedge \neg\chi_2$$

Ekvivalence formulí

$$\neg(p \vee q) \;\Leftrightarrow\; \neg p \wedge \neg q$$

Náhrada atomických výroků:

- p nahradíme $q \vee \neg(r \rightarrow \neg s)$
- q nahradíme $\neg(q \leftrightarrow p)$

Dostaneme

$$\neg((q \vee \neg(r \rightarrow \neg s)) \vee \neg(q \leftrightarrow p)) \;\Leftrightarrow\; \neg(q \vee \neg(r \rightarrow \neg s)) \wedge \neg\neg(q \leftrightarrow p)$$

Ekvivalence formulí

Řekněme, že φ je formule a ψ nějaká její podformule.

Pokud nyní ve φ nahradíme nějaký výskyt podformule ψ formulí ψ' takovou, že $\psi \Leftrightarrow \psi'$, dostaneme tím z formule φ formuli φ' takovou, že

$$\varphi \Leftrightarrow \varphi' .$$

Příklad: Ve formuli

$$\neg((p \to q) \vee (\neg(p \to q) \to r))$$

nahradíme druhý výskyt podformule $p \to q$ ekvivalentní formulí $\neg p \vee q$.

Dostaneme

$$\neg((p \to q) \vee (\neg(\neg p \vee q) \to r))$$

Ekvivalentní úpravy

Pro libovolné formule φ, ψ a χ platí:

- $\varphi \Leftrightarrow \varphi$.
- Pokud $\varphi \Leftrightarrow \psi$, tak $\psi \Leftrightarrow \varphi$.
- Pokud $\varphi \Leftrightarrow \psi$ a $\psi \Leftrightarrow \chi$, tak $\varphi \Leftrightarrow \chi$.

Při zdůvodňování toho, že dané formule jsou ekvivalentní, můžeme postupovat po menších krocích:

Pokud například platí $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$, $\varphi_2 \Leftrightarrow \varphi_3$, $\varphi_3 \Leftrightarrow \varphi_4$ a $\varphi_4 \Leftrightarrow \varphi_5$, můžeme z toho vyvodit, že platí

$$\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_5 .$$

Tento postup můžeme stručněji zapsat

$$\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2 \Leftrightarrow \varphi_3 \Leftrightarrow \varphi_4 \Leftrightarrow \varphi_5$$

Ekvivalentní úpravy

Příklad: Zdůvodnění toho, že platí

$$(p \wedge q) \rightarrow r \;\Leftrightarrow\; p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

$$\begin{aligned}
(p \wedge q) \rightarrow r &\Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee r \\
&\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee r \\
&\Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee r) \\
&\Leftrightarrow \neg p \vee (q \rightarrow r) \\
&\Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)
\end{aligned}$$