Cvičení 1

Příklad 1: Pro každý z následujících formálních zápisů množin uveďte (svými slovy), jaké prvky daná množina obsahuje:

a) $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$
b) $\{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$
c) $\{n \mid n = 2m \text{ pro nějaké } m \in \mathbb{N}\}$
d) $\{n \mid n = 2m \text{ pro nějaké } m \in \mathbb{N} \text{ a } n = 3k \text{ pro nějaké } k \in \mathbb{N}\}$
e) $\{n \in \mathbb{Z} \mid n = n + 1\}$

Řešení:

a) Lichá přirozená čísla
b) Sudá celá čísla
c) Přirozená čísla dělitelná dvěmi beze zbytku
d) Přirozená čísla dělitelná šesti beze zbytku
e) Žádné, jedná se o prázdnou množinu

Příklad 2: Popište vhodným formálním zápisem následující množiny:

a) Množina obsahující čísla 1, 10 a 100.
b) Množina obsahující všechna celá čísla větší než 5.
c) Množina obsahující všechna přirozená čísla menší než 5.
d) Množina neobsahující žádné prvky.
e) Množina všech podmnožin dané množiny X.

Řešení:

a) $\{1, 10, 100\}$.
b) $\{n \in \mathbb{Z} \mid n > 5\}$.
c) $\{n \in \mathbb{N} \mid n < 5\}$ nebo $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.
d) $\emptyset$
e) $\{Y \mid Y \subseteq X\}$

Příklad 3: Uvažujme množiny $A = \{x, y, z\}$ a $B = \{x, y\}$.

a) Je $A \subseteq B$?
b) Je $A \supseteq B$?
c) Co je $A \cup B$?
d) Co je $A \cap B$?
e) Co je $A \times B$?
f) Co je $\mathcal{P}(B)$?

Řešení:

a) Ne
b) Ano
c) A
d) B
e) $\{(x,x),(x,y),(y,x),(y,y),(z,x),(z,y)\}$
f) $\{\emptyset,\{x\},\{y\},\{x,y\}\}$

Příklad 4: Rozhodněte, zda platí:

a) $a \in \{\{a\},\{a,\{a\}\}\}$

   Řešení: ne

b) $\{a,\{a\}\} \cap \mathcal{P}(\{a,\{a\}\}) = \emptyset$

   Řešení: ne

c) $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$

   Řešení: ano

Příklad 5: Určete všechny prvky následujících množin:

a) $\{a,\{a\}\} \cup \{a,\{b\},c\}$

   Řešení: $a,\{a\},\{b\},c$

b) $\{a,\{a\}\} \cap \{a,\{b\},c\}$

   Řešení: a

c) $\{a,\{a\}\} - \{a,\{b\},c\}$

   Řešení: $\{a\}$

Příklad 6: Jestliže množina A má a prvků a množina B má b prvků, kolik prvků má množina $A \times B$? Vaši odpověď vysvětlete.

Řešení: $a \cdot b$

Příklad 7: Jestliže množina C má c prvků, kolik prvků má množina $\mathcal{P}(C)$? Vaši odpověď vysvětlete.

Řešení: 2^c

Příklad 8: Připomeňte si, co je to relace, a jaké znáte typy relací (homogenní vs. nehomogenní, unární, binární, atd.).

a) Přesně definujte, co to znamená, že relace je reflexivní, ireflexivní, symetrická, asymetrická, antisymetrická, tranzitivní, funkční.

b) Uvědomte si souvislost mezi binárními relacemi a orientovanými grafy (které mohou být i nekonečné) a popište, co jednotlivé vlastnosti uvedené v předchozím bodě znamenají z hlediska grafu reprezentujícího příslušnou relaci.

c) Připomeňte si, co to znamená, že relace je ekvivalence. Jak pojem ekvivalence souvisí s pojmem rozkladu?

Příklad 9: Uveďte příklad binární relace, která je:

a) Reflexivní a symetrická, ale není tranzitivní.

Řešení: Například následující relace na množině $\mathbb{R}$:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x - y| \leq 1\}$$

Nebo následující relace na množině $\{a, b, c\}$:

$$\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b)\}$$

b) Reflexivní a tranzitivní, ale není symetrická.

Řešení: Například relace $\leq$ na množině $\mathbb{N}$ nebo relace

$$\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (b, c)\}$$

na množině $\{a, b, c\}$.

c) Symetrická a tranzitivní, ale není reflexivní.

Řešení: Například relace

$$\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (a, c), (c, a)\}$$

na množině $\{a, b, c, d\}$ nebo prázdná relace $\emptyset$ nad jakoukoliv neprázdnou množinou.

Příklad 10: Připomeňte si, co to znamená, že relace je uspořádání. Jaké znáte typy uspořádání? Uveďte příklad uspořádání na množině přirozených čísel, které není úplným uspořádáním.

Řešení: Například relace dělitelnosti na přirozených číslech.

Příklad 11: Nechť $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $Y = \{6, 7, 8, 9, 10\}$. Unární funkce $f : X \to Y$ a binární funkce $g : X \times Y \to Y$ jsou popsány následujícími tabulkami:

n	$f(n)$
1	6
2	7
3	6
4	7
5	6

g	6	7	8	9	10
1	10	10	10	10	10
2	7	8	9	10	6
3	7	7	8	8	9
4	9	8	7	6	10
5	6	6	6	6	6

a) Jaká je hodnota $f(2)$?
b) Co definičním oborem a oborem hodnot funkce f?
c) Jaká je hodnota $g(2, 10)$?
d) Co definičním oborem a oborem hodnot funkce g?
e) Jaká je hodnota $g(4, f(4))$?

Řešení:

a) 7
b) Definiční obor je $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, obor hodnot je $\{6, 7\}$.
c) 6
d) $\{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$
e) 8

Příklad 12: Připomeňte si, co to znamená, že funkce je injektivní (prostá), surjektivní (na) a bijektivní. Je funkce $f(x) = x + 1$ injektivní, surjektivní a/nebo bijektivní na množině přirozených čísel $\mathbb{N}$? A na množině celých čísel $\mathbb{Z}$?

Řešení: Na množině $\mathbb{Z}$ je funkce f injektivní, surjektivní i bijektivní, na množině $\mathbb{N}$ je injektivní, ale není surjektivní ani bijektivní (pro žádné $x \in \mathbb{N}$ není $f(x) = 0$).

Příklad 13: Připomeňte si pojem binární operace na množině a co to znamená, že daná operace je asociativní, a co to znamená, že je komutativní. Uveďte příklad operace, která:

a) je asociativní, ale není komutativní,
b) je komutativní, ale není asociativní.
c) není asociativní ani komutativní.

***Příklad 14:** Uvažujme asociativní operaci $\circ$ na množině S. Ukažte, že hodnota výrazu $x_1 \circ x_2 \circ \cdots \circ x_n$, kde $x_i \in S$, je dobře definovaná, neboť tato hodnota nezávisí na konkrétním uzávorkování.

Řešení:
Uzávorkované výrazy definujme následovně: x, kde $x \in S$, je uzávorkovaný výraz, a $(\alpha_1 \circ \alpha_2)$, kde α_1 a α_2 jsou uzávorkované výrazy, je uzávorkovaný výraz (a žádné další uzávorkované výrazy neexistují). Velikost výrazu α, kterou označíme $\mathit{size}(\alpha)$, je definována tak, že $\mathit{size}(x) = 1$ pro $x \in S$ a $\mathit{size}((\alpha_1 \circ \alpha_2)) = \mathit{size}(\alpha_1) + \mathit{size}(\alpha_2)$. Hodnotu výrazu α označme $\mathit{val}(\alpha)$. Zápisem $\alpha = \beta$ budeme označovat, že α a β jsou identické výrazy. Zápis $\mathit{val}(\alpha) = \mathit{val}(\beta)$ znamená, že výrazy α a β nabývají stejných hodnot. Pro libovolné uzávorkované výrazy α, β, γ tedy platí $((\alpha \circ \beta) \circ \gamma) \neq (\alpha \circ (\beta \circ \gamma))$ a $(\mathit{val}(\alpha) \circ \mathit{val}(\beta)) \circ \mathit{val}(\gamma) = \mathit{val}(\alpha) \circ (\mathit{val}(\beta) \circ \mathit{val}(\gamma))$ (protože $\circ$ je asociativní). Je také očividné, že $\mathit{val}((\alpha_1 \circ \alpha_2)) = \mathit{val}(\alpha_1) \circ \mathit{val}(\alpha_2)$.

Řekněme, že α je uzávorkovaný výraz vzniklý nějakým libovolným doplněním závorek do výrazu $x_1 \circ x_2 \circ \cdots \circ x_n$. V dalším textu budeme zápisem α_k, kde $0 \leq k \leq n$, označovat výraz tvaru $((\cdots((x_1 \circ x_2) \circ x_3) \circ \cdots) \circ x_k) \circ (x_{k+1} \circ (x_{k+2} \circ (\cdots \circ (x_{n-1} \circ x_n) \cdots)))$. Speciálně tedy $\alpha_1 = (x_1 \circ (x_2 \circ (\cdots \circ (x_{n-1} \circ x_n) \cdots)))$ a $\alpha_{n-1} = ((\cdots((x_1 \circ x_2) \circ x_3) \circ \cdots) \circ x_n)$. Pozn.: Pro $n = 1$ je $\alpha_1 = \alpha_0 = x_1$.

Díky asociativitě operace $\circ$ zjevně platí $val(\alpha_k) = val(\alpha_{k+1})$ pro každé k, kde $1 \leq k < n - 1$, takže $val(\alpha_1) = val(\alpha_2) = \cdots = val(\alpha_{n-1})$.

Pro dokázání toho, že na uzávorkování výrazu α nezáleží, stačí dokázat, že $val(\alpha) = val(\alpha_1) = val(\alpha_{n-1})$. To se dá lehce dokázat indukcí podle $size(\alpha)$. Pokud $size(\alpha) = 1$, tvrzení zjevně platí, protože $\alpha = x_1$, což je jediné možné uzávorkování. Předpokládejme tedy, že $size(\alpha) > 1$, takže $\alpha = (\beta \circ \gamma)$, pro nějaké uzávorkované výrazy β a γ takové, že $size(\beta) < size(\alpha)$ a $size(\gamma) < size(\alpha)$.

Podle indukčního předpokladu je $val(\beta) = val(\beta_{k-1})$, kde $k = size(\beta)$ a $\beta_{k-1} = ((\cdots((x_1 \circ x_2) \circ x_3) \circ \cdots) \circ x_k)$, a $val(\gamma) = val(\gamma_1)$, kde $\gamma_1 = (x_{k+1} \circ (x_{k+2} \circ (\cdots \circ (x_{n-1} \circ x_n) \cdots)))$, takže $val(\alpha) = val((\beta \circ \gamma)) = val(\beta) \circ val(\gamma) = val(\beta_{k-1}) \circ val(\gamma_1) = val((\beta_{k-1} \circ \gamma_1)) = val(\alpha_k)$. Protože $val(\alpha) = val(\alpha_k)$ a $val(\alpha_k) = val(\alpha_1) = val(\alpha_{n-1})$, dostáváme $val(\alpha) = val(\alpha_1) = val(\alpha_{n-1})$, čímž je důkaz hotov.