Cvičení 6

Příklad 1: Pro každou z následujících sekvencí symbolů rozhodněte, zda se jedná o dobře utvořenou formuli predikátové logiky (používejte běžné konvence pro vypouštění závorek). Pokud se v daném případě jedná o dobře utvořenou formuli, proveďte následující:

- Nakreslete abstraktní syntaktický strom dané formule.
- Určete, jaké predikátové symboly se v dané formuli nachází a jaká je jejich arita.
- Pro každý jednotlivý výskyt proměnné určete, zda je tento výskyt volný nebo vázaný. V případě vázaného výskytu určete, kterým kvantifikátorem je tento výskyt vázán.

Poznámka: P, Q, R, S jsou predikátové symboly

1. P
2. x
3. $P(x)$
4. $x(P)$
5. Pxy
6. $\forall P(x)$
7. $P(x) \wedge \exists x$
8. $\exists x R(x, y)$
9. $\forall z(R(x, y) \rightarrow R(y, x))$
10. $\neg \exists x(\neg P(x, y) \rightarrow R(y, x))$
11. $P(P(x, y), z)$
12. $\neg P(x) \wedge \exists x Q(x)$
13. $\forall x \forall y(P(x) \vee P(x, y))$
14. $\forall x \exists y P(x)$
15. $\forall x \exists x P(x)$
16. $\forall x \exists y P(R(x, y))$
17. $\forall x \exists y P(\neg x, y)$
18. $\exists x(P(y, z) \wedge \forall y(\neg Q(y, x) \vee P(y, z)))$
19. $\forall x \forall x \forall x \forall x \forall x \forall x \forall x \forall x\, S(x, x, x)$
20. $\exists x(\forall y(\neg P(x, y)) \rightarrow \forall y Q(y)) \leftrightarrow R(x, y)$

Příklad 2: Řekněme, že P a Q jsou unární predikátové symboly a R je binární predikátový symbol.

Pro každou z následujících formulí a každou z následujícících interpretací a valuací určete, zda je daná formule pravdivá v dané interpretaci a valuaci.

Formule:

1. $R(x, y)$
2. $R(x, y) \rightarrow R(z, x)$
3. $\forall x \forall y \forall z(R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z))$
4. $\exists x(Q(x) \wedge \forall y R(y, x))$
5. $\exists x(\neg P(x))$
6. $\forall x \exists y \neg R(x, y)$
7. $\forall x \forall y(Q(x) \wedge Q(y) \ \rightarrow \ \exists z(R(x, z) \wedge R(z, y) \wedge Q(z)))$

Interpretace:

a) Interpretace $\mathcal{A}$, kde universem je množina $A = \{a, b, c\}$. Predikátům P, Q, R jsou přiřazeny následující relace:

- $P^{\mathcal{A}} = \{a, c\}$
- $Q^{\mathcal{A}} = \emptyset$

- $R^{\mathcal{A}} = \{(a, c), (b, b), (b, c), (c, a)\}$

Předpokládejme valuaci v, kde $v(x) = c$, $v(y) = a$ a $v(z) = a$.

b) Interpretace $\mathcal{B}$, kde univerzem je množina reálných čísel čísel $\mathbb{R}$. Predikátům P, Q, R jsou přiřazeny následující relace:

- $P^{\mathcal{B}}$ je množina všech nezáporných reálných čísel
- $Q^{\mathcal{B}}$ je množina všech racionálních čísel
- $R^{\mathcal{B}}$ je množina všech těch dvojic reálných čísel (x, y), kde $x < y$.

Předpokládejme valuaci v, kde $v(x) = 7$, $v(y) = 2.3$, $v(z) = 9$.

Příklad 3: Pro každou z následujících formulí najděte nějakou interpretaci, která je jejím modelem, a nějakou interpretaci, která jejím modelem není.

1. $\exists x \big(P(x) \wedge \neg Q(x)\big)$
2. $\forall x \big(P(x) \rightarrow \neg Q(x)\big)$
3. $\exists x \big(P(x) \wedge Q(x)\big)$
4. $\forall x \exists y \big(P(x) \rightarrow \neg R(x, y)\big)$

Příklad 4: Pomocí ekvivalentních úprav odvoďte:

1. $\neg \forall y \exists x P(x, y) \;\Leftrightarrow\; \exists y \forall x \neg P(x, y)$
2. $\exists x \forall y Q(y) \;\Leftrightarrow\; \forall y \forall x Q(y)$
3. $\forall x P(x) \;\rightarrow\; \exists z(\neg \forall y(Q(y) \;\vee\; R(z, y))) \;\Leftrightarrow\; \exists x \neg P(x) \;\vee\; \exists z \exists y(\neg R(z, y) \wedge \neg Q(y))$

Příklad 5: Které z následujících dvojic formulí jsou logicky ekvivalentní? Pokud formule nejsou ekvivalentní, uveďte příklad interpretace a valuace, kde jedna z těchto formulí platí a druhá ne.

1. $\exists x P(x) \;\Leftrightarrow\; P(x)$
2. $\exists y \exists x P(x) \;\Leftrightarrow\; \exists x P(x)$
3. $\exists y \exists x P(x) \;\Leftrightarrow\; \exists y P(y)$

Příklad 6: Pomocí Vennových diagramů zjistěte, zda daný závěr logicky vyplývá z uvedených předpokladů. Pokud závěr z těchto předpokladů nevyplývá, uveďte příklad interpretace, kde platí předpoklady a neplatí závěr.

a) *Všichni lidé potřebují k životu kyslík.*
Lidé jsou živé organismy.
____
Všechny živé živé organismy potřebují k životu kyslík.

b) *Z obrazů jsou cenné právě ty, na kterých je zobrazeno moře.*
Všechny obrazy, na kterých je zobrazeno moře, jsou olejomalby.
Některé z obrazů nejsou olejomalby.

Žádný obraz, který není olejomalba, není cenný.

Poznámka: Pro jednoduchost předpokládejte, že všechny prvky universa jsou obrazy.

c) *Všechna celá čísla jsou racionální.*
Existuje alespoň jedno racionální číslo, které není celé.
Každé reálné číslo buď je racionální nebo není racionální.

Existuje reálné číslo, které je racionální.

Poznámka: Pro jednoduchost předpokládejte, že všechny prvky universa jsou čísla.

Příklad 7: Ukažte, že v následujících případech daný závěr logicky nevyplývá z uvedeného předpokladu. Uveďte příklad interpretace, kde platí tento předpoklad, ale neplatí závěr.

a) předpoklad: $\forall x \exists y P(x, y)$, závěr: $\exists y \forall x P(x, y)$
b) předpoklad: $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$, závěr: $\exists x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$
c) předpoklad: $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$, závěr: $\exists x (P(x) \wedge Q(x))$
d) předpoklad: $\forall x (P(x) \vee Q(x))$, závěr: $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$
e) předpoklad: $\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$, závěr: $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$

Příklad 8: Uveďte příklad interpretace, ve které současně platí všechny čtyři následující formule:

- $\neg \exists x R(x, x)$
- $\forall x \exists y R(x, y)$
- $\exists x \forall y (\neg R(y, x))$
- $\forall x \forall y \forall z (R(x, y) \rightarrow (R(y, z) \rightarrow R(x, z)))$