

VŠB–Technická Univerzita Ostrava

Teorie her

studijní opora

Zdeněk Sawa

Verze: 19. dubna 2021

Obsah

1 Úvod	1
1.1 Tutoriály a samostatná práce studentů	1
1.2 Podmínky udělení zápočtu	1
1.3 Podmínky vykonání zkoušky	1
2 Tutoriál 1	3
2.1 Čím se zabývá teorie her	3
2.2 Různé typy her	4
2.3 Kombinatorické hry	6
3 Tutoriál 2	9
3.1 Hra NIM	9
3.2 Sprague-Grundyova funkce a sumy her	9
4 Tutoriál 3	13
4.1 Hry dvou hráčů s nulovým součtem ve strategickém tvaru	13
4.2 Jednoduché přístupy k řešení maticových her	14
4.3 Lineární programování	15
5 Tutoriál 4	17
5.1 Hry dvou hráčů s nulovým součtem v rozvinutém tvaru	17
6 Tutoriál 5	19
6.1 Hry dvou hráčů s obecným součtem ve strategickém tvaru	19
6.2 Kooperativní hry	20
7 Řešení některých příkladů	21

Kapitola 1

Úvod

Tento text by měl sloužit jako studijní opora pro předmět *Teorie her* v kombinované formě. Není zamýšlen jako samostatný studijní text, ale jako detailní průvodce obsahem jednotlivých tutoriálů. Jsou zde stručně shrnuta jednotlivá témata spolu s odkazy na příslušné kapitoly (resp. části kapitol nebo konkrétní stránky) v jednotlivých učebních textech a seznamy konkrétních příkladů, které by si měl student k danému tématu vyřešit.

Hlavním studijním materiálem je učební text

Thomas S. Ferguson — *Game Theory* [3],

který je volně dostupný na webové adrese <http://www.math.ucla.edu/~tom/math167.html> a který slouží jako učební text pro předmět Game Theory na University of California at Los Angeles.

Další zdroje jsou uvedeny v seznamu literatury.

1.1 Tutoriály a samostatná práce studentů

Na tutoriálech budou jednotlivá témata probírána spolu s diskusí ohledně řešení některých uvedených příkladů. Předpokládá se, že příslušné části jednotlivých textů si studenti samostatně nastudují doma.

Veškeré body za zápočet dostávají studenti za zápočtovou písemku, která se bude psát na 4. tutoriálu. Kromě této písemky nemusí plnit studenti žádné další bodované úkoly. Předpokládá se však, že kromě vlastní výuky na tutoriálech studenti samostatně studují příslušné texty a zkouší samostatně řešit příklady, které se na tutoriálu nestihnou probrat. Také se předpokládá, že na tutoriálech mají studenti možnost probírat s tutorem jakékoliv případné problémy, na které při studiu textů a samostatném řešení příkladů narazí.

Celkem se předpokládá 5 tutoriálů.

Podrobný obsah jednotlivých tutoriálů je popsán v následujících kapitolách.

1.2 Podmínky udělení zápočtu

Na 4. tutoriálu se bude psát zápočtová písemka. Tato písemka bude hodnocena maximálně 30 body, přičemž pro získání zápočtu je třeba získat z těchto 30 bodů minimálně 15 bodů.

1.3 Podmínky vykonání zkoušky

Zkouška bude formou písemky, za kterou je možné získat až 70 bodů. Pro absolvování předmětu je třeba získat z těchto 70 bodů minimálně 30 bodů.

Kapitola 2

Tutoriál 1

Probíraná témata: Úvod – čím se zabývá teorie her. Kombinatorické hry, grafové hry.

2.1 Čím se zabývá teorie her

Obecně se dá říci, že teorie her jako vědní obor je podoblast aplikované matematiky, která se zabývá studiem konfliktních situací z matematického hlediska. V teorii her se takovým konfliktním situacím říká **hry**, ale slovo „hra“ je zde chápáno v poněkud širším významu a ve významu, který je poněkud posunutý proti tomu, jak slovu „hra“ rozumíme v běžné řeči. Takové konfliktní situace (hry) jsou charakteristické tím, že v nich figuruje několik účastníků (tj. více než jeden) — v teorii her se těmito účastníky říká **hráči**, kteří se snaží dosáhnout určitých cílů, přičemž cíle jednotlivých hráčů jsou většinou různé, často pak přímo protikladné.

Tito hráči volí mezi různými akcemi, které mohou provádět. Jaké akce může daný hráč provádět (tj. mezi jakými možnostmi volí), je stanoveno **pravidly** dané hry. Důležité je, že výsledek, jakého hráč nakonec v dané hře dosáhne, nezávisí čistě jen na akcích, které provedl tento hráč, ale je určen také tím, jaké akce provedli ostatní hráči. V závislosti na pravidlech dané hry může být tento výsledek také ovlivněn náhodou.

Typickými otázkami, které se v teorii her studují, jsou otázky týkající se vlastností **strategií**, které mohou jednotliví hráči v dané hře použít. Strategií se zde rozumí konkrétní postup, podle kterého hráč volí své akce v závislosti na akcích ostatních hráčů. Zejména se zkoumají strategie, které jsou v nějakém smyslu optimální nebo něco danému hráči zaručují bez ohledu na akce ostatních hráčů, apod. Otázky se týkají například zkoumání existence takových strategií, hledáním takových optimálních strategií, toho jakými různými způsoby se dá definovat, jaké strategie považujeme za „optimální“, atd.

Pokud například může být výsledkem každé partie dané hry jen to, že jeden z hráčů vyhraje a druhý prohraje, může mít například smysl ptát se, jestli má určitý hráč v dané hře **vyhrávající strategii**, tj. strategii, která mu zaručí pokaždé vítězství bez ohledu na to, jak hraje protihráč. Pokud hra může skončit i remízou, můžeme se ptát třeba na existenci **neprohrávající strategie**, tj. strategie, která danému hráči zaručí, že nikdy neprohraje (tj. vždy vyhraje nebo uhraje alespoň remízu), bez ohledu na to, jak hraje protihráč.

Následuje několik příkladů oblastí, ve kterých je možné některé jevy popisovat a studovat jako hry (ve smyslu teorie her) a využívat při jejich zkoumání prostředků teorie her:

- a) **Hry v běžném slova smyslu** — společenské hry jako například šachy, go, piškvorky, poker, bridge, člověče nezlob se, kámen-nůžky-papír, apod.

Poznámka: Pokud výsledek závisí pouze na náhodě (jako například u loterií), o hru ve smyslu teorie her se nejedná. Také hry, které hraje jen jeden hráč sám se sebou (např. pasíans), nejsou typickým předmětem studia teorie her.

- b) **Ekonomie** — celou řadu různých ekonomických vztahů je možné popisovat jako hry — vztahy mezi vzájemně si konkurujícími firmami, vztahy mezi nakupujícími a prodávajícími, vztahy mezi zaměstnanci a zaměstnavateli, vztahy, které se týkají využívání nějakého sdíleného zdroje více účastníky, apod. Historicky je teorie her velmi silně propojena právě s ekonomikou.

Poznámka: Nakolik jsou však výsledky teorie her relevantní pro popis a zkoumání ekonomické skutečnosti (např. pro předpovídání skutečného vývoje trhů apod.) silně závisí na tom, do jaké míry příslušné matematické modely odpovídají skutečnosti. Zkoumané modely jsou oproti skutečnosti často velmi idealizované a mnohdy pracují s různými předpoklady, které v realitě splněny nejsou.

- c) **Další společenské vědy** — například politologie (volby, hlasování, tvorba koalic, ...), historie (například modelování možných průběhů válečných konfliktů, bitev, apod.), sociologie (konflikty mezi různými sociálními skupinami) či psychologie (modelování některých druhů mezilidských vztahů).
- d) **Biologie** — například modelování (konfliktních) vztahů mezi různými druhy (vztahy mezi predátorem a kořistí, parazitem a hostitelem, apod.), mezi různými populacemi téhož druhu, mezi jedinci téhož druhu, mezi určitými variantami genu v rámci populace, apod.
- e) **Matematika** — řadu matematických problémů, které na první pohled nemají nic společného s hrami, může být výhodné přeformulovat jako otázky týkající se například existence určitého druhu strategií v nějakém určitém typu her. Často to bývá formulováno například tak, že určitý abstraktní matematický objekt existuje právě tehdy, pokud má v odpovídající hře jeden z hráčů vyhrávající strategii. Nežádka jsou hry používané v matematice poněkud abstraktní v tom smyslu, že skuteční živí hráči by takové hry nemohli nikdy hrát, protože daná hra například vyžaduje provedení nekonečného množství tahů, apod. Různé typy her se například často využívají v logice a v teorii množin.
- f) **Informatika** — podobně jako v předchozím bodě jsou mnohé problémy, které se objevují v teoretické informatice, často formulovány jako otázky týkající se určitých typů her, i když dané problémy na první pohled s hrami nijak nesouvisí. Postupy využívající hry se používají například při zkoumání korektnosti programů nebo při zkoumání chování komunikačních a síťových protokolů. Typickým příkladem je třeba použití her pro zkoumání vlastností kryptografických protokolů (například útočník má možnost dostat se k určité informaci, ke které by se dostat neměl, právě tehdy, když v odpovídající hře existuje nějaká strategie s nějakou určitou vlastností).

Specifickou oblastí, která leží na hranici mezi informatikou a teorií her, je **algoritmická teorie her**. Zde se zkoumají hry z algoritmického hlediska. Zejména se zkoumá rozhodnutelnost a výpočetní složitost různých problémů týkajících se her, například, jak výpočetně náročné je pro určitý typ her zjištění, jestli má daný hráč vítěznou strategii, jaká je výpočetní složitost problému nalezení optimální strategie, apod.

Poznámka: V předmětu Teorie her se konkrétními aplikacemi teorie her příliš zabývat nebudeme. Místo toho se budeme soustředit na teorii her jako takovou s tím, že se občas dotkneme otázek týkajících se algoritmů pro řešení některých problémů z teorie her.

2.2 Různé typy her

Hry se dají v teorii her rozdělovat podle různých kritérií:

- a) **Počet hráčů** — Z hlediska analýzy jsou nejjednodušší hry, kde hrají dva hráči. Analýza her, kde je hráčů tři a více, je obecně složitější. Většinou ale pak už není velký rozdíl v tom, jestli jsou hráči tři, čtyři nebo je jich víc. Pokud je hráčů velmi velký počet, může být někdy výhodné místo toho uvažovat hry, ve kterých hraje nekonečný počet hráčů.

V předmětu Teorie her se budeme z velké části zabývat hrami dvou hráčů, v menší míře pak hrami, kde hraje libovolný, ale konečný, počet hráčů. Hrami s nekonečným počtem hráčů se zabývat nebudeme.

- b) **Výše výhry** — Z hlediska analýzy jsou nejjednodušší hry, kde výsledkem partie v dané hře je to, že jeden z hráčů vyhraje a druhý prohraje. Případy, kdy hra může skončit také remízou, jsou jen mírně komplikovanější.

Složitější jsou hry, kdy hráči získávají určitou výši výhry, která se podle výsledku hry může lišit. Většinou se výše výhry vyjadřuje jako reálné číslo — kladné hodnoty znamenají zisk, záporné hodnoty ztrátu.

Zde se rozlišují dva případy:

- **hry s nulovým součtem** — jedná se o hry, kde součet zisků jednotlivých hráčů v každé partii je vždy 0, tj. co jeden hráč vyhraje, to musel jiný hráč (resp. hráči) prohrát. Analýza těchto typů her je obecně jednodušší, zejména v případě, kdy jsou hráči pouze dva, protože v takovém případě nemá pro hráče nikdy smysl spolupracovat (zisk jednoho je vždy ztrátou druhého).
- **hry s nenulovým (obecným) součtem** — zisky hráčů mohou být zcela libovolné. Tyto hry jsou obecně komplikovanější, protože v takových hrách může být někdy pro hráče výhodné spolupracovat. V některých hrách se může dokonce stát, že pokud hráči zvolí strategii, které jsou optimální z hlediska každého jednotlivého hráče, ve výsledku na tom mohou být všichni hráči hůř než pokud by zvolili strategii, které nejsou optimální.

- c) **Role náhody** — Někdy je náhodný prvek přímo součástí pravidel dané hry (např. házení kostkou nebo míchání karet). Při analýze takovýchto her bývá tento náhodný prvek reprezentován jako pseudohráč, kterému se říká **příroda** nebo **náhoda**. Tento pseudohráč provádí různé akce podobně jako ostatní hráči, ale na rozdíl od ostatních hráčů nesleduje žádný konkrétní cíl a výběr akcí, které provádí, se řídí nějakým daným pravděpodobnostním rozdělením.

Kromě náhody, která vyplývá z pravidel hry, mohou hráči vnést náhodný prvek do svého chování tak, aby nebylo zcela deterministické a předvídatelné. (Toto se týká i her, které z hlediska pravidel žádnou náhodnost neobsahují.) V takovém případě se pak rozlišují **ryzí** (*pure*) strategie, které představují jednotlivé možnosti, jak hráč může (deterministicky) hrát, a **smíšené** (*mixed*) strategie, které odpovídají pravděpodobnostním rozdělením na množině ryzích strategií, které může hráč hrát. Hráč pak (deterministicky) volí příslušnou smíšenou strategii a na základě této smíšené strategie náhodně vybírá v každé jednotlivé partii některou konkrétní ryzí strategii.

V případě smíšených strategií se hodnota zisku jednotlivých hráčů stává náhodnou veličinou a pro zkoumání takových her se pak používají prostředky z teorie pravděpodobnosti.

- d) **Míra spolupráce mezi hráči** — Jednou variantou jsou hry, kde se hráči nemohou mezi sebou domlouvat. Takovým hrám se říká **nekooperativní**. V těchto hrách sice nemohou hráči přímo spolupracovat, ale v případě her s nulovým součtem může mít pro hráče smysl volit svou strategii na základě předpokladu, že ostatní hráči jsou racionální a jde jim v první řadě o dosažení svých vlastních cílů, ne o co největší poškození daného hráče.

Hry, ve kterých se mohou hráči před vlastní hrou domlouvat, se označují jako **kooperativní**. Zde se hráči předem domluví na strategiích, které budou hrát. Vlastní jádro konfliktu mezi hráči se tak přesouvá do fáze dohadování se o tom, jaké strategie budou hrát a jestli se vůbec dohodnou. Rozlišují se zde dva případy — hry **s přenosnou výhrou** a hry **bez přenosné výhry**. U her bez přenosné výhry jsou zisky hráčů dány pravidly hry a hráči se dohodnou jen na tom, jaké strategie budou hrát. U her s přenosnou výhrou se navíc mohou dohodnout na tom, jak si své výhry přerozdělí. Jeden z hráčů například může druhého motivovat ke spolupráci tím, že mu zaplatí část ze své výhry.

- e) **Míra informace, kterou mají hráči k dispozici** — V předmětu Teorie her se budeme zabývat prakticky výhradně hrami s **úplnou informací** (*complete information*). Tímto pojmem se označují hry, kde se předpokládá, že všichni hráči znají „pravidla“ dané hry, tj. znají předem všechny možné akce, které mohou provést oni sami i všechny akce, které mohou provést jejich protivníci, znají výše výher všech hráčů pro všechny možné případy, které mohou nastat, a znají také pravděpodobnostní rozdělení všech náhodných tahů, které provádí „příroda“.

Opakem her s úplnou informací jsou hry s **neúplnou informací** (*incomplete information*), kde někteří hráči nemusí některou z výše uvedených informací znát. Například si hráč nemusí být vědom některé možné akce, kterou může jeho protivník provést (například neví, že jeho protihráč má schované eso v rukávu). Takové typy her mají velký význam například v ekonomii, kde je obvyklé, že mnozí účastníci trhu mají jen omezené množství informací a jsou tak v nevýhodě proti těm, kteří mají informace přesnější. V předmětu teorie her se však hrami s neúplnou informací zabývat nebudeme.

I u her s úplnou informací mohou být v průběhu hry před některými hráči některé informace skryty. Typickým příkladem jsou třeba karetní hry, kdy například hráč sice zná své karty, ale neví, jaké karty mají jeho protihráči, ani jaké karty jsou v balíčku na stole. Jedná se ale o omezení, která jsou dána pravidly hry a kterých jsou si všichni hráči vědomi. Hráč tak sice třeba přesně neví, jaké karty má protihráč, ale může například určit pravděpodobnosti, s jakými mohou jednotlivé případy nastat.

Hry, ve kterých není žádná informace před hráči skryta (tj. každý hráč ví vše o aktuální situaci, zná všechny předchozí tahy svých protivníků, zná výsledky všech náhodných tahů, atd.), se označují jako hry s **dokonalou informací** (*perfect information*)

Text k prostudování: úvod v textu [3] (str. 3 – 8)

Doplňková literatura: Kapitola 1 — Basic Solution Concepts and Computational Issues (E. Tardos, V. Vazirani) v knize [6] (str. 3 – 28)

2.3 Kombinatorické hry

Kombinatorické hry jsou nejjednodušším typem her. Jedná se o hry dvou hráčů s dokonalou informací, kde žádným způsobem nefiguruje náhoda, a kde výsledkem partie je to, že jeden hráč vyhrál a druhý prohrál, případně v obecnějším případě může být výsledkem remíza. V kombinatorických hrách tedy nefigurují výše výher. Navíc se předpokládá, že oba hráči se v tazích pravidelně střídají. Hráč, který je momentálně na tahu, má tedy veškeré informace o aktuální pozici a o všech předchozích pozicích a tazích, jak svých, tak protivníkových.

Příklady kombinatorických her jsou třeba šachy, dáma, go nebo piškvorky. Zvláště jednoduchými příklady takových her jsou různé odebírací hry, kdy hráči střídavě odebírají nějaké předměty (např. sirky, kamínky, žetony nebo něco podobného) z hromádky nebo hromádek těchto předmětů podle určitých pravidel. (Pro jednoduchost budeme mluvit v následujícím o sirkách, ale je jasné, že to, o jaké předměty se jedná, není podstatné.)

Můžeme začít například hrou, kdy hráči střídavě odebírají sirky z hromádky sirek, přičemž hráč, který je momentálně na tahu, může odebrat jednu až tři sirky. Vyhrává hráč, který vezme poslední sirku.

U této hry není těžké přijít na to, pro které počty sirek má vyhrávající strategii hráč, který je momentálně na tahu, a pro které počty sirek má vyhrávající strategii jeho protihráč.

Toto vede přirozeně k rozdělení možných pozic (tj. v tomto případě počtů sirek) na:

- ***N-pozice*** — kde má vyhrávající strategii hráč, který je momentálně na tahu,
- ***P-pozice*** — kde má vyhrávající strategii hráč, který není momentálně na tahu.

Řešení této hry můžeme zkusit zobecnit. Můžeme uvažovat jiná pravidla pro odebírání sirek i jiná pravidla pro určení vítěze (např. ten, kdo vezme poslední sirku, prohrál, a jeho protivník vyhrál).

Tyto úvahy přirozeně vedou k reprezentaci hry pomocí (orientovaného) *grafu*. Vrcholy grafu představují jednotlivé dosažitelné pozice ve hře, hrany vedoucí z vrcholu pak odpovídají tahům, které je možné v dané pozici provést. Pro koncové pozice (tj. pro vrcholy grafu, které nemají žádné následníky), musí být stanoveno, kdo v dané pozici vyhrál.

Pokud uvažujeme jednoduchý případ, kdy se v grafu nevyskytují cykly ani nekonečné cesty, dají se vrcholy grafu snadno rozdělit na N-pozice a P-pozice postupem, kdy začínáme od koncových pozic a postupujeme pozpátku směrem k předchozím pozicím. Není těžké si rozmyslet, že v takovém případě je pro každou pozici v grafu jednoznačně určeno, zda se jedná o N-pozici či P-pozici a že jedna z těchto možností musí pro každou pozici nastat.

Navíc máme algoritmus, který toto rozdělení určí v čase, který je zhruba úměrný velikosti grafu.

Pokud máme vrcholy grafu rozdělené na N-pozice a P-pozice, snadno na základě tohoto rozdělení vytvoříme vítěznou strategii pro hráče, který ji v dané pozici má. Speciálně pro každou N-pozici určíme vítězný tah, který hráči, který je na tahu, zaručí vítězství. Z těchto konstrukcí je také vidět, že v tomto typu her vítězná strategie nezávisí na historii — vítězný tah je možné určit čistě na základě aktuální pozice bez ohledu na to, jak se hráči do této pozice dostali.

Tyto úvahy se dají relativně snadno zobecnit na případy, kdy je graf nekonečný, obsahuje cykly, kdy partie může skončit remízou, apod., i když ve všech těchto případech je situace o něco komplikovanější než ve výše uvedeném příkladu se sirkami. Dostáváme tak algoritmus, kterým lze (alespoň v principu) analyzovat velkou část kombinatorických her. Dává nám to postup, jak analyzovat třeba šachy, je však zjevné, že v případě šachu je graf příliš obrovský na to, aby se dal tímto způsobem v nějakém rozumném čase zpracovat.

Pokud chceme pro danou kombinatorickou hru analyzovat, jak vypadají N-pozice a P-pozice, ale příslušný graf je velmi velký nebo dokonce nekonečný, nemusí to být vůbec snadné. Je například známo, že zjištění, o jakou pozici se jedná, je EXPTIME-úplný problém pro šachy, dámu i go zobecněné na případy, kde může mít herní plocha libovolnou velikost $n \times n$.

I zdánlivě velmi jednoduché hry mohou vést na relativně komplikované kombinatorické problémy. Příkladem jsou třeba hry ve Cvičení 1.5.7 (str. I-7) v [3].

Pěkným příkladem je třeba hra Chomp! popsána v příkladu 1.5.6 (str. I-6) v [3]. U této hry existuje jednoduchý důkaz toho, že počáteční pozice je N-pozice (tj. hráč, který začíná, má vždy vyhrávající strategii). Tento důkaz je však nekonstruktivní, ukazuje pouze existenci této strategie, ale nedává žádnou informaci o tom, jak by taková vítězná strategie měla vypadat. (Úkolem v tomto cvičení je přijít na tento nekonstruktivní důkaz). Obecně není znám efektivní algoritmus pro nalezení vítězných strategií v této hře, který by umožňoval tuto hru řešit i pro velmi velké počáteční pozice.

Text k prostudování: kapitola „Take-Away Games“ v textu [3] (str. I-3 – I-8)

Doplňková literatura: přehledový článek [5]

Příklady: Cvičení 1.5.1, 1.5.2, 1.5.3, 1.5.4, 1.5.5, 1.5.6, 1.5.7 (a) v textu [3] (str. I-6 – I-7)

Další nepovinné příklady: Cvičení 1.5.7 (b) v textu [3] (str. I-7)

Kapitola 3

Tutoriál 2

Probíraná témata: Hra NIM. Sprague-Grundyova funkce. Sumy her a jejich řešení pomocí Sprague-Grundyovy funkce.

3.1 Hra NIM

Hra NIM je jednou z nejvýznamnějších kombinatorických her. Jedná se o hru, kdy dva hráči střídavě odebírají sirky z hromádek sirek, přičemž těchto hromádek může být libovolný (konečný) počet a každý hromádka může obsahovat libovolný (konečný) počet sirek. Tah hráče vypadá tak, že musí zvolit libovolnou hromádku a z ní odebrat libovolný (nenulový) počet sirek. Vyhrává hráč, který vezme poslední sirku.

Tato hra je významná z několika důvodů. Na jednu stranu má velmi jednoduchá pravidla, ale její analýza (tj. určení, které pozice jsou N-pozice a které P-pozice) zdaleka tak jednoduchá není (pokud nevíme, jak na to). Tato hra má však řešení, které je poměrně jednoduché (když už ho člověk zná), elegantní a překvapivé.

Toto řešení spočívá v tom, že pokud zapíšeme počty sirek v jednotlivých hromádkách binárně a provedeme na nich operaci, kterou bychom mohli nazvat bitový XOR (v textu [3] je tato operace nazývána „nim-sum“), platí, že daná pozice je P-pozicí právě tehdy, když je výsledkem dané operace hodnota 0.

Důkaz toho, že tomu tak skutečně je, není úplně očividný (i když není ani příliš složitý). Každý student by si měl tento důkaz detailně projít a promyslet, protože pochopení tohoto důkazu je důležité pro pochopení dalšího výkladu.

Hra NIM je zajímavá i sama o sobě, ale ještě mnohem důležitější je to, že jak uvidíme později, myšlenky, na kterých je založena analýza této hry, se dají výrazným způsobem zobecnit. Ukazuje se, že analýza celé řady různých kombinatorických her, které třeba na první pohled vůbec jako NIM nevypadají, se dá převést na analýzu určité zobecněné varianty hry NIM.

Několik příkladů her, které sice na první pohled jako NIM nevypadají, ale u kterých se jedná v podstatě jen o určité „zamaskované“ varianty NIMu, je uvedeno ve cvičeních.

Text k prostudování: kapitola „The Game of Nim“ v textu [3] (str. I-9 – I-13)

Příklady: cvičení 2.6.1, 2.6.2, 2.6.3, 2.6.4, 2.6.5, 2.6.6, 2.6.7 v textu [3] (str. I-11 – I-13)

3.2 Sprague-Grundyova funkce a sumy her

Představme si dva hráče, kteří současně hrají n různých kombinatorických her G_1, \dots, G_n (tyto hry mohou mít stejná nebo různá pravidla). Předpokládejme navíc, že tahy hráčů vypadají tak,

že hráč, který je na tahu, si vybere jednu z her G_1, \dots, G_n a v ní provede tah podle pravidel této hry. Celková hra končí v okamžiku, kdy se v žádné z her G_1, \dots, G_n nedá táhnout. Hráč, který je v tom okamžiku na tahu, prohrál a jeho protivník vyhrál.

Hra, která vznikne tímto způsobem z her G_1, \dots, G_n se nazývá *sumou* těchto her.

Jednotlivé hry G_1, \dots, G_n mohou být mnohem jednodušší než hra, kterou dostaneme jako jejich sumu.

Důležitá (a poměrně nečekaná) myšlenka je to, že na každou takovou sumu her se můžeme podívat jako na určité zobecnění hry NIM. Z určitého pohledu se můžeme dívat na každou dílčí hru G_i jako na jednu hromádku ve hře NIM. Každé pozici v každé dílčí hře G_i bychom chtěli přiřadit přirozené číslo, které by odpovídalo počtu sirek v dané hromádce ve hře NIM, tak, abychom pro určení N-pozic a P-pozic mohli použít stejný postup, jako u hry NIM.

Když si promyslíme důkaz ohledně hry NIM, uvědomíme si, že aby důkaz „fungoval“, jsou důležité dvě věci: a) každým tahem se počet sirek změní (tj. nemůže zůstat stejný) a mění se v právě jedné hromádce, b) počet sirek v libovolné hromádce je možné jedním tahem snížit na libovolné menší číslo.

Chtěli bychom tedy najít funkci, která by každé pozici v každé dílčí hře přiřazovala přirozené číslo, a která by měla podobné vlastnosti jako ty, co jsou uvedeny v bodech (a) a (b).

Tyto úvahy přirozeně vedou k definici tzv. *Sprague-Grundyovy funkce*, která koncovým pozicím přiřazuje hodnotu 0 a všem ostatním pozicím nejmenší přirozené číslo, které není přiřazeno bezprostředním následníkům dané pozice.

Důkaz, který byl použit u hry NIM, se pak dá přímočaře zobecnit na případ, kdy místo počtů sirek uvažujeme libovolné pozice ve hrách G_1, \dots, G_n a hodnoty, které jsou jim přiřazeny Sprague-Grundyovou funkcí. Navíc se dá ukázat, že hodnotu Sprague-Grundyovy pro sumu her dostaneme pomocí operace bitový XOR z hodnot Sprague-Grundyových funkcí dílčích her G_1, \dots, G_n . Dále platí, že daná pozice je P-pozicí právě tehdy, když hodnota Sprague-Grundyovy funkce je pro tuto pozici 0.

Toto nám dává velmi mocný prostředek pro analýzu těch kombinatorických her, které jsme schopni rozložit na jednoduché hry, ze kterých vznikne původní hra jako jejich suma. Obecně může být určení hodnot Sprague-Grundyovy funkce obtížné (je jasné, že nemůže být jednodušší než určení N-pozic a P-pozic). Pokud ale můžeme hru rozložit hru na hry, které jsou natolik jednoduché, že pro ně už Sprague-Grundyovu funkci spočítat umíme, můžeme hodnotu Sprague-Grundyovy funkce pro celkovou pozici spočítat z hodnot Sprague-Grundyových funkcí pro jednotlivé dílčí hry.

Důležité také je, že navíc můžeme výše zjištěné postupy používat i induktivně, tj. uvažovat hry, které vzniknou jako sumy her, které jsou samy sumami her, které jsou samy sumami her, atd. Pěkným příkladem tohoto přístupu je třeba analýza tzv. Laskerova NIMu, která je uvedena v textu [3] na str. I-23 až I-24. Problém, který na první pohled vypadá velmi komplikovaně, se dá za použití výše uvedených myšlenek velmi elegantně vyřešit (i když i tak není důkaz úplně triviální).

Výše uvedené úvahy fungují bez problémů ve hrách, kde neexistují v příslušném grafu nekonečné cykly, kde z žádného vrcholu nevede nekonečná cesta, a kde má každá pozice konečný počet následníků. Pokud tyto podmínky splněny nejsou, je situace podstatně komplikovanější. Pokud v grafu existují cykly nebo nekonečné cesty, Sprague-Grundyova funkce nemusí pro danou hru existovat nebo nemusí být dána jednoznačně. I když existuje, může se v takových hrách stát, že příslušná strategie založená na dané Sprague-Grundyově funkci nemusí být vítěznou strategií.

Pokud některé pozice mají v grafu nekonečný počet následníků, nemusí stačit počítat Sprague-Grundyovy funkce v přirozených číslech, ale může být potřeba úvahy poněkud zobecnit a přejít do oboru ordinálních čísel. Příkladem jednoduché hry, kde je třeba při analýze počítat s ordinálními čísly, je ve Cvičení 3.5.6 v textu [3] (str. I-19 – I-20).

Text k prostudování: kapitoly „Graph Games“ a „Sums of Combinatorial Games“ v textu [3] (str. I-14 – I-28)

Příklady: cvičení 3.5.1, 3.5.2, 3.5.4 (a), 3.5.4, 3.5.5, 3.5.6, 3.5.7, 3.5.8, 3.5.9 v textu [3] (str. I-18 – I-20), cvičení 4.5.1, 4.5.2, 4.5.3, 4.5.4, 4.5.5, 4.5.6, 4.5.8, 4.5.9 v textu [3] (str. I-26 – I-27)

Doplňková literatura: kapitoly „Coin Turning Games“ a „Green Hackenbush“ v textu [3] (str. I-29 – I-46)

Kapitola 4

Tutoriál 3

Probíraná témata: Hry dvou hráčů s nulovým součtem ve strategickém tvaru, maticové hry, dominované strategie, sedlové body, smíšené strategie. Řešení maticových her ve smíšených strategiích převodem na lineární programování.

4.1 Hry dvou hráčů s nulovým součtem ve strategickém tvaru

Ve hrách ve *strategickém tvaru* má každý z hráčů množinu strategií, které může použít. Tyto strategie nemají žádnou další strukturu, jsou to prostě prvky příslušné množiny. Hra vypadá tak, že všichni hráči najednou zvolí své strategie, tj. každý hráč vybere nějakou strategii ze své množiny strategií. Pokud máme n hráčů, po tomto výběru dostaneme n -tici strategií. Pro každého hráče je určena tzv. *výplatní funkce*, která každé takové n -tici strategií přiřazuje reálné číslo. Hodnota této funkce udává zisk daného hráče v příslušné hře.

V této části se zaměříme na speciální případ takovýchto her a to hry dvou hráčů s nulovým součtem. Prvního a druhého hráče budeme označovat jako Hráče I a Hráče II. Jestliže se jedná o hru s nulovým součtem a zisk Hráče I je x , tak zisk Hráče II je $-x$. Proto stačí pro danou hru stanovit jen výplatní funkci pro Hráče I a výplatní funkci pro Hráče II dostaneme jako její opačnou hodnotu.

Ve většině případů se v následujícím výkladu také budeme omezovat jen na hry, kde jsou množiny strategií obou hráčů konečné. V takovém případě můžeme hru reprezentovat maticí, kde řádky matice odpovídají strategiím Hráče I a sloupce strategiím Hráče II. Prvek matice pak udává zisk Hráče I a ztrátu Hráče II (tj. částku, kterou Hráč II zaplatí Hráči I) v případě, kdy Hráč I zvolil daný řádek a Hráč II daný sloupec. Takové hry se označují jako *maticové hry*.

V takovýchto hrách se dá snadno určit maximální výše minimálního zisku Hráče I, který si je schopen zajistit bez ohledu na to, jak hraje Hráč II, a také minimální výši maximální ztráty Hráče II, kterou si je schopen zajistit bez ohledu na to, jak hraje Hráč I. Pokud se tyto dvě hodnoty rovnají, znamená to, že ve hře existuje tzv. *sedlový bod*. V takovém případě žádný z hráčů nic lepšího dosáhnout nemůže a příslušné strategie jsou tím nejlepším, co může hráč hrát. Hry, kde existuje sedlový bod, se tedy dají snadno zanalyzovat, ale z hlediska nějakého dalšího zkoumání jsou dost nezajímavé.

Mnohem zajímavější jsou hry, kde neexistuje sedlový bod. Pokud bychom se soustředili jen na deterministickou volbu strategií a na zisk nebo ztrátu, kterou jsou si hráči schopni zajistit v jednotlivé partii, snadno dojdeme k tomu, že v takovém případě optimální strategie nemusí existovat.

Hráči ale mohou vnést do svého rozhodování náhodu a začít vybírat ze svých strategií náhodně. Původní strategie, ze kterých hráči vybírají, tj. strategie, které odpovídají řádkům a sloupcům

příslušné matice, se označují jako **ryzí** (*pure*) strategie. Pokud hráč vybírá ze svých ryzích strategií náhodně, příslušné pravděpodobnostní rozdělení na množině těchto ryzích strategií se označuje jako **smíšená** (*smíšená*) strategie.

Pokud hráči používají smíšené strategie, výsledek každé jednotlivé partie je náhodný. Pokud ale známe příslušné pravděpodobnosti, s jakými hráči své ryzí strategie volí, můžeme spočítat střední hodnotu zisku Hráče I (která je samozřejmě rovna střední hodnotě ztráty Hráče II), tj. hodnotu, ke které bude po odehrání velkého množství partií konvergovat průměrná hodnota zisku z jedné partie.

Úkolem je teď najít nějaké co neoptimalnější smíšené strategie, které Hráči I zaručí co nejvyšší střední hodnotu zisku a Hráči II co nejmenší střední hodnotu ztráty.

Jak uvidíme později, v případě maticových her vždy existuje optimální smíšená strategie Hráče I, která mu zaručí určitou co největší střední hodnotu zisku bez ohledu na to, jak hraje Hráč II, a podobně vždy existuje optimální smíšená strategie Hráče II, která mu zaručí určitou co nejmenší střední hodnotu ztráty bez ohledu na to, jak hraje Hráč I. Navíc se tyto dvě hodnoty (zaručený minimální zisk Hráče I a zaručená maximální ztráta Hráče II) rovnají. Tato hodnota se označuje jako **cena hry**. (Pokud je cena hry kladná, je v dané hře zvýhodněn Hráč I, pokud je záporná, je zvýhodněn Hráč II).

Cílem analýzy her dvou hráčů s nulovým součtem ve standardním tvaru je tedy určit cenu hry a najít optimální strategie obou hráčů. Všechny tyto hodnoty jsou v případě maticových her dobře definovány a tyto optimální smíšené strategie vždy existují.

4.2 Jednoduché přístupy k řešení maticových her

V případě maticových her, kde má matice velikost 2×2 (tj. každý z hráčů vybírá jen ze dvou strategií), je řešení velmi jednoduché. V takových hrách buď existuje sedlový bod nebo neexistuje, ale v takovém případě mají optimální strategie obou hráčů podobu tzv. **ekvalizujících** strategií.

Hodnoty pravděpodobností v těchto ekvalizujících strategiích není těžké spočítat a snadno se dají odvodit i obecné vzorce pro výpočet těchto hodnot, do kterých pak stačí dosadit příslušné hodnoty. Podobně se dá snadno odvodit i vzorec pro cenu hry.

V případě větších matic se může někdy ukázat, že některá ryzí strategie je **dominovaná** nějakou jinou strategií, což znamená, že výsledek při použití této dominované strategie je pro daného hráče vždy (tj. bez ohledu na to, jak hraje protihráč) horší, než kdyby použil strategii, která ji dominuje. Takové dominované strategie nemá pro daného hráče vůbec smysl hrát a proto můžeme příslušný řádek nebo sloupec z matice úplně vypustit a analyzovat menší hru.

Vypouštěním dominovaných strategií se mohou stát dominovanými i strategie, které předtím dominované nebyly. Dominované strategie tedy můžeme vypouštět tak dlouho, dokud se v příslušné matici nějaké dominované strategie nacházejí. Navíc strategie nemusí být dominovaná jen jednou strategií, ale může být dominovaná i pravděpodobnostní kombinací více strategií (toto je ovšem o něco složitější zjistit).

V některých případech je možné postupným odstraňováním dominovaných strategií matici zmenšit až na velikost 2×2 a tu pak vyřešit.

Obecně nalezení optimálních strategií pro matice libovolné velikosti není úplně jednoduché. Co je ale velmi snadné, je ověřit pro libovolné smíšené strategie (které nám například někdo dá nebo které nějak odvodíme), jestli jsou optimální.

Pro hry, kde jeden z hráčů má jen dvě ryzí strategie (tj. kde matice jsou velikosti $2 \times n$ nebo $m \times 2$), se dají optimální strategie najít pomocí grafu. Pokud si graf nakreslíme nepřesně, může vyjít výsledek špatně. To se dá snadno zjistit, takže v případě chyby je možné řešení opravit a ověřit, že je skutečně správné.

Ani jedna z těchto jednoduchých metod se asi nedá příliš zobecnit tak, aby se s použitím těchto přístupů dalo najít řešení pro hry s jakoukoliv maticí. K tomu je potřeba poněkud silnější nástroj — tzv. lineární programování.

Text k prostudování: kapitoly „The Strategic Form of a Game“ a „Matrix Games — Domination“ v textu [3] (str. II-3 – II-16)

Doplňková literatura: řešení některých dalších speciálních případů maticových her je popsáno v kapitole „The Principle of Indifference“ v textu [3] (str. II-17 – II-33)

Příklady: cvičení 1.5.1, 1.5.2, 1.5.3, 1.5.4 v textu [3] (str. II-7), cvičení 2.6.1, 2.6.2, 2.6.3, 2.6.4, 2.6.5, 2.6.7, 2.6.8, 2.6.9, 2.6.10, 2.6.11 v textu [3] (str. II-14 – I-16)

Další nepovinné příklady: cvičení 2.6.6 v textu [3] (str. II-14)

4.3 Lineární programování

Obecně se dají maticové hry řešit tím způsobem, že se převedou na problém tzv. **lineárního programování**. Lineární programování je problém, kdy máme danou soustavu lineárních rovnic a nerovnic a lineární kritériální funkci (s libovolným konečným počtem neznámých), a úkolem je najít řešení, při kterém jsou všechny rovnice a nerovnice splněny a při kterém daná kritériální funkce nabývá maximální (resp. minimální) hodnoty. Předpokládá se, že koeficienty všech lineárních funkcí, hodnoty všech konstant i hledaná řešení jsou z oboru reálných (resp. racionálních) čísel.

Výsledek může být buď ten, že daná soustava vůbec žádné řešení nemá, nebo ten, že sice řešení má, ale žádné není optimální, protože ke každému řešení existuje lepší, nebo ten, že se najde nějaké konkrétní optimální řešení.

Způsob, jak převést řešení maticových her na lineární programování, je popsán v textu [3]. Jsou zde popsány dokonce dva způsoby, jak to udělat. První z nich je o něco jednodušší, ale vede k o něco větší úloze lineárního programování. Druhý je o něco komplikovanější, ale je poněkud vhodnější pro praktické výpočty.

Úlohu lineárního programování je možné převést do tzv. **standardního tvaru**, kde úkolem je určit $\max c^T x$ při $Ax \leq b$ a $x \geq 0$. Zde A je matice rozměru $m \times n$, b je vektor rozměru $m \times 1$, c je vektor rozměru $n \times 1$. Matice A a vektory b a c jsou dány, úkolem je najít příslušný vektor x (rozměru $n \times 1$).

Úloha lineárního programování tvaru $\max c^T x$ při $Ax \leq b$ a $x \geq 0$ se označuje jako **primární**. **Duální** úloha k této úloze má tvar $\min y^T b$ při $y^T A \geq c$ a $y \geq 0$. Není těžké ověřit, že pokud určíme duální úlohu k duální úloze, dostaneme původní primární úlohu.

Pokud převádíme řešení maticové hry na problém lineárního programování, dostaneme jednu úlohu pro optimální strategii Hráče I a druhou úlohu pro optimální strategii Hráče II. Dá se ověřit, že dvě úlohy, které tak dostaneme, jsou navzájem duální. Hodnoty kritériálních funkcí odpovídají zisku Hráče I a ztrátě Hráče II, které si jsou schopni zajistit bez ohledu na to, jak hraje protihráč.

Pro duální úlohy lineárního programování mimo jiné platí, že pokud v obou existuje nějaké řešení, tak v obou existuje optimální řešení a tato optima se rovnají. V úlohách, které vzniknou převodem z maticových her, řešení vždy existuje. Z toho pak snadno vyplývá, že řešení, které takto dostaneme skutečně odpovídají optimálním strategiím obou hráčů.

Nejklasičtější a v praxi nejpoužívanější algoritmus pro řešení problémů lineárního programování je tzv. **simplexová metoda**. Jedná se algoritmus, který má exponenciální časovou složitost v nejhorsím případě, v praxi však pro naprostou většinu vstupních instancí velmi rychle konverguje k nalezení řešení. Pomocí simplexové metody se zároveň spočítá řešení primární i duální úlohy. Pro nalezení optimálních strategií pro oba hráče tedy stačí použít simplexovou metodu jen jednou.

Pro řešení lineárního programování existují i polynomiální algoritmy, tyto jsou však podstatně komplikovanější a v praxi většinou pomalejší než simplexová metoda.

Text k prostudování: kapitola „Solving Finite Games“ v textu [3] (str. II-34 – II-45)

Doplňková literatura: Lineární programování je detailně vysvětleno například v textu [4] a v kapitole „Linear Programming“ v knize [2] (str. 770 – 821).

Příklady: cvičení 4.7.1, 4.7.2, 4.7.4 v textu [3] (str. II-43 – II-44)

Další nepovinné příklady: cvičení 4.7.3, 4.7.5 v textu [3] (str. II-44 – II-45)

Kapitola 5

Tutoriál 4

Probíraná témata: Hry dvou hráčů s nulovým součtem v rozvinutém tvaru, Kuhnův strom, náhodné tahy, hry s nedokonalou informací.

5.1 Hry dvou hráčů s nulovým součtem v rozvinutém tvaru

Pokud chceme matematicky modelovat hry, ve kterých figuruje náhoda, skrytá informace, současné provádění tahů více hráči, apod., je výhodné takové hry popsat pomocí tzv. *Kuhnova stromu*.

Vrcholy tohoto stromu odpovídají pozicím a hrany možným tahům. Na rozdíl od reprezentace pomocí orientovaného grafu je v případě použití stromu zachycena v každé pozici i historie hry. Vrcholy stromu jsou označeny číslem hráče, který tam provádí tah. V některých vrcholech může tah provádět příroda. V takovém případě jsou jednotlivé hrany vedoucí z tohoto vrcholu označeny příslušnými pravděpodobnostmi. Koncové pozice jsou označeny zisky hráčů. Skrytá informace je reprezentovaná pomocí tzv. *informačních množin*, což jsou množiny vrcholů, mezi kterými daný hráč, který je v nich na tahu, není schopen rozlišovat.

Strategie (tj. ryzí strategie) jsou pak funkce, která každé informační množině daného hráče přiřazují příslušné následníky.

Hry reprezentované tímto způsobem se označují jako hry *v rozvinutém tvaru*. Typickým úkolem je najít optimální smíšené strategie obou hráčů a cenu hry.

Jako příklad hry, na které jsou tyto pojmy ilustrovány, je zvolena velmi zjednodušená varianta pokeru, která však přesto zachycuje většinu podstatných rysů této hry.

Hra ve standardním tvaru se dá snadno převést na hru v rozvinutém tvaru. Naopak hra v rozvinutém tvaru se dá převést na hru ve standardním tvaru, i když tento převod je o něco komplikovanější.

Typický způsob, jak vyřešit hry dvou hráčů s nulovým součtem v rozvinutém tvaru, kde je navíc příslušný Kuhnův strom konečný, je převést je na standardní tvar a vyřešit tuto hru ve standardním tvaru dříve popsanými metodami.

Obecně může být strom velmi velký (oproti orientovanému grafu může být exponenciálně větší), převodem na standardní tvar dochází k dalšímu exponenciálnímu nárůstu velikosti.

Text k prostudování: kapitola „The Extensive Form of a Game“ v textu [3] (str. II-46 – II-57)

Příklady: cvičení 5.9.1, 5.9.2, 5.9.3, 5.9.4, 5.9.5, 5.9.7, 5.9.8, 5.9.9, 5.9.10, 5.9.11, 5.9.12 v textu [3] (str. II-55 – II-57)

Kapitola 6

Tutoriál 5

Probíraná témata: Hry dvou hráčů s obecným součtem ve strategickém tvaru, bimaticové hry, Nashovy rovnovážné body. Kooperativní hry, hry s přenosnou výhrou

6.1 Hry dvou hráčů s obecným součtem ve strategickém tvaru

V případě her s obecným součtem jsou výplatní funkce obou hráčů zcela nezávislé. V případě dvou hráčů tedy máme dvě výplatní funkce, každou pro jednoho hráče. Pokud jsou množiny strategií obou hráčů konečné, mohou být tyto reprezentovány pomocí dvojice matic, takové hry se proto označují jako *bimaticové*.

Podobně jako u her s nulovým součtem je možné i hry s obecným součtem reprezentovat pomocí standardního tvaru i rozvinutého tvaru a mezi těmito dvěma tvary lze převádět zcela analogicky jako v případě her s nulovým součtem.

U her s obecným součtem může mít pro hráče smysl spolupracovat, situace je tedy podstatně komplikovanější než u her s nulovým součtem. Strategie, které by byly optimální v podobném smyslu jako u her s nulovým součtem, zde obecně nemusejí existovat.

Rozlišují se *nekooperativní hry* a *kooperativní hry*.

V případě nekooperativních her jsou zde ústředním pojmem tzv. *Nashovy rovnovážné body*, neboli *Nashova ekvilibria*. Nashovo ekvilibrium ve hře n hráčů je taková n -tice smíšených strategií těchto n hráčů, kde pro každého hráče platí, že jeho strategie je *nejlepší odpovědí* na dané strategie ostatních $n - 1$ hráčů. V Nashově ekvilibrriu si tedy žádný hráč nemůže polepšit tím, že by změnil svou strategii, přičemž ostatní hráči by své strategie nezměnili.

Velmi důležitým výsledkem teorie her je věta, kterou dokázal John Nash, a která říká, že ve hrách n hráčů, kde každý hráč má konečný počet ryzích strategií, vždy existuje alespoň jedno Nashovo ekvilibrium.

Důkaz této věty je uveden v Apendixu 3 — „Existence of Equilibria in Finite Games“ v textu [3] (str. A-8 – A-9). Důkaz této věty je nekonstruktivní, dokazuje pouze existenci ekvilibria, ale nedává žádnou informaci o tom, jak dané ekvilibrium vypadá. Důkaz se zásadním způsobem opírá o tzv. Brouwerovu větu o pevném bodu, což je důležitá věta v topologii. Důkaz Brouwerovy věty je poměrně komplikovaný.

Obecně je hledání Nashových ekvilibrií velmi těžkým problémem. Na druhou stranu ověření toho, že nějaká daná n -tice smíšených strategií je skutečně Nashovým ekvilibrriem, je poměrně snadné.

V některých speciálních případech se ale dají Nashova ekvilibria úspěšně najít.

Poměrně dobře je prostudováno hledání Nashových ekvilibrií ve hrách dvou hráčů. Pro matice velikosti 2×2 je úloha jednoduchá. Pro větší matice se dá řešit hrubou silou, ale složitost naivního algoritmu roste exponenciálně s velikostí matice. O něco efektivnější řešení je algoritmus Lemke-Howson. Tento algoritmus se trochu podobá simplexové metodě. V nejhorsím případě má exponenciální časovou složitost, ale pro spoustu vstupních instancí rychle konverguje k nalezení Nashova ekvilibria.

Problém hledání Nashových ekvilibrií v bimaticových hrách je zajímavý a významný i z hlediska teorie složitosti. Jedná se o příklad tzv. PPAD-úplného problému. Pro tyto problémy nejsou známy polynomiální algoritmy, ale ani není známo, že by byly NP-těžké. Téměř jakékoliv zobecnění této úlohy (např. otázka, jestli existují v dané hře alespoň dvě Nashova ekvilibria, jestli existuje ekvilibrium, které zaručí danému hráči určitou výši výhry, jestli existuje ekvilibrium, kde součet výher hráčů překročí určitou hodnotu, apod.) je NP-těžkým problémem.

Text k prostudování: kapitoly „Bimatrix Games — Safety Levels“ a „Noncooperative Games“ v textu [3] (str. III-1 – III-15), Appendix 3 — „Existence of Equilibria in Finite Games“ v textu [3] (str. A-8 – A-9)

Příklady: cvičení 1.6.1, 1.6.2, 1.6.3, 1.6.4 v textu [3] (str. III-6), cvičení 2.5.1, 2.5.2, 2.5.3, 2.5.4, 2.5.5, 2.5.6, 2.5.7, 2.5.8, 2.5.9, 2.5.10 v textu [3] (str. III-13 – III-15)

Doplňková literatura: Otázky týkající se výpočetní složitosti řešení bimaticových her jsou diskutovány v Kapitole 2 — The Complexity of Finding Nash Equilibria (C.H. Papadimitriou) v knize [6] (str. 29 – 51).

Algoritmy pro řešení těchto her (zejména algoritmus Lemke-Howson) jsou popsány v Kapitole 3 — Equilibrium Computation for Two-Player Games in Strategic and Extensive Form (B. von Stengel) v téže knize (str. 53 – 78).

Velmi srozumitelný popis algoritmu Lemke-Howson je možné najít v článku [7].

Důkaz Brouwerovy věty o pevném bodu je uveden například v knize [1] (str. 147 – 149).

6.2 Kooperativní hry

U kooperativních her je důležitým pojmem *Paretovo optimum*. Jedná se o n -tici smíšených strategií, pro kterou neexistuje žádná jiná n -tice strategií, kde by každý z hráčů měl stejný nebo větší zisk a alespoň jeden z hráčů měl ostře větší zisk. Oproti situaci v Paretově optimu si tedy nikdo nemůže polepšit bez toho, aby si někdo jiný pohoršil.

U strategií, na kterých se hráči v kooperativních hrách domlouvají, nemá smysl uvažovat jiné n -tice strategií než Paretova optima.

U bimaticových her s přenosnou výhrou existuje možnost řešení spočívající v tom, že hráči předloží tzv. *strategie hrozby* a dohodnou se pak na Paretově optimu, které vyberou mezi všemi Paretovými optimy tak, aby platilo, že v případě nedohody, kdy by oba hráči uplatnili své strategie hrozby, na tom oba trafilí přesně stejně oproti situaci, kdy se dohodnou.

V takových hrách se oba hráči snaží optimalizovat své strategie hrozby ne vzhledem k původní hře, ale vzhledem k této její modifikaci. Ukáže se, že úkol se dá převést na řešení maticové hry s nulovým součtem.

Text k prostudování: kapitola „Cooperative Games“ v textu [3] (str. III-25 – III-40)

Kapitola 7

Řešení některých příkladů

Příklad 1.5.7 (a) – Dynamic subtraction (v textu [3], str. I-7):

Zadání: Dva hráči, označení Hráč I a Hráč II, odebírají sirky z hromádky. Na začátku je v hromádce n sirek. V prvním tahu může Hráč I odebrat libovolný nenulový počet sirek, nesmí však odebrat všech n sirek. V následujících tazích se hráči střídají. Hráč, který je momentálně na tahu, může odebrat libovolný nenulový počet sirek, nesmí však odebrat více sirek, než odebral jeho protihráč v předchozím tahu. Vyhrává hráč, který vezme poslední sirku.

- (a) Který z hráčů má vyhrávající strategii, pokud je na začátku počet sirek $n = 44$? Pokud má vítěznou strategii Hráč I, jaký je jeho počáteční vítězný tah?
- (b) Pro které hodnoty n má v počátečních pozicích s n sirkami vítěznou strategii Hráč I a pro které Hráč II?

Řešení: Z pravidel hry vyplývá, že v aktuální pozici není důležitý jen počet sirek v hromádce, ale také maximální počet sirek, který je v dané chvíli možné odebrat. Je tedy přirozené reprezentovat pozice jako dvojice (n, k) , kde n je přirozené číslo udávající aktuální počet sirek v hromádce ($n \geq 0$) a k je přirozené číslo udávající maximální počet sirek, které je možné odebrat ($k \geq 1$). Koncové pozice jsou pak ty dvojice (n, k) , kde $n = 0$. V těchto koncových pozicích prohrává hráč, který je momentálně na tahu; všechny tyto koncové pozice jsou tedy P-pozice.

Na začátku je možné v prvním tahu odebrat libovolný počet sirek, ale ne všechny. Pokud tedy máme na začátku n sirek, je možné odebrat v prvním tahu maximálně $n - 1$ sirek, počáteční pozice tedy odpovídá dvojici $(n, n - 1)$.

V dalším popisu budeme používat zápis $(n, k) \xrightarrow{x} (n', k')$ pro označení toho, že v pozici (n, k) je možné odebrat x sirek a po odebrání těchto x sirek se dostaneme do pozice (n', k') . Z pravidel hry vyplývá, že pokud $(n, k) \xrightarrow{x} (n', k')$, tak $n \geq 1$, $1 \leq x \leq k$, $x \leq n$, $n' = n - x$ a $k' = k$.

Zaměříme se nyní na pozice, které nejsou koncové, tj. pozice (n, k) , kde $n \geq 1$. (Pro každou takovou pozici existuje alespoň jedna pozice (n', k') taková, že $(n, k) \xrightarrow{x} (n', k')$.) Pro tyto pozice musíme určit, které z nich jsou N-pozice a které P-pozice.

Nejprve si všimněme, že pokud (n, k) je N-pozice, tak také všechny pozice (n, k_1) , kde $k_1 \geq k$, jsou N-pozice. Je tomu tak proto, že jestliže (n, k) je N-pozice, tak existuje nějaká P-pozice (n', k') taková, že $(n, k) \xrightarrow{x} (n', k')$ pro nějaké x . Protože $1 \leq x \leq k$ a $k \leq k_1$, tak také $1 \leq x \leq k_1$. V pozici (n, k_1) je tedy možné odebrat x sirek a $(n, k_1) \xrightarrow{x} (n', k')$ (připomeňme, že $k' = k$). I v pozici (n, k_1) je tedy možný tah do P-pozice.

Bezprostředním důsledkem předchozího pozorování je to, že pokud (n, k) je P-pozice, tak každá pozice (n, k_1) , kde $k_1 \leq k$, je také P-pozice. (Pokud by (n, k_1) byla N-pozice, tak podle předchozího pozorování by (n, k) musela být N-pozice, což by bylo ve sporu s předpokladem, že (n, k) je P-pozice.)

Rovněž je očividné, že všechny (nekoncové) pozice (n, k) , kde $k \geq n$, jsou N-pozice, protože v každé takové pozici je možno odebrat n sirek a po tomto odebrání se dostaneme do koncové P-pozice $(0, n)$.

Z těchto úvah vyplývá, že pro každé $n \geq 1$ existuje nějaká nejmenší hodnota k , pro kterou platí, že (n, k) je N-pozice (a pro všechny větší hodnoty k se rovněž jedná o N-pozice a naopak všechny pro všechny menší hodnoty k se jedná o P-pozice). Označme tuto minimální hodnotu k pro dané n jako $f(n)$. (Formálně je $f: (\mathbb{N} - \{0\}) \rightarrow (\mathbb{N} - \{0\})$ funkce přiřazující hodnotám n , kde $n \geq 1$, tuto minimální hodnotu k).

Vidíme tedy, že existuje jakási funkce $f: (\mathbb{N} - \{0\}) \rightarrow (\mathbb{N} - \{0\})$ taková, kde pro $n \geq 1$ a $k \geq 1$ platí:

- Pokud $k < f(n)$, tak (n, k) je P-pozice.
- Pokud $k \geq f(n)$, tak (n, k) je N-pozice.

Pokud se nám podaří určit, jak vypadá tato funkce f , tak jsme v podstatě hotovi, protože tím bude jednoznačně určeno rozdělení pozic na P- a N-pozice.

Není nijak očividné, jak by funkce f měla vypadat. Je tedy asi vhodné začít tím, že si zkusíme určit hodnoty této funkce pro malé hodnoty n . Zde můžeme postupovat hrubou silou, prostě k danému n najdeme minimální hodnotu k , pro kterou existuje tah z pozice (n, k) do nějaké P-pozice (předpokládáme, že pro všechny menší hodnoty n už jsme hodnoty funkce f určili, takže pro každý tah z pozice (n, k) už víme, zda vede do N- nebo P- pozice).

Hodnoty funkce f si můžeme zapisovat do tabulky. Začátek této tabulky vypadá takto:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$f(n)$	1	2	1	4	1	2	1	8	1	2	1	4	1	2	1	16	1	2	1	4

Pokud by nás zajímalo řešení jen pro $n = 44$, mohli bychom ve vyplňování této tabulky pokračovat až do hodnoty 44. Zjistili bychom, že $f(44) = 4$ a že tedy $(44, 43)$ (tj. počáteční pozice se 44 sirkami) je N-pozice a v této pozici má vyhrávající strategii Hráč I. Také bychom z tabulky vyplněné až do hodnoty 44 zjistili, že Hráč I má v počáteční pozici se 44 sirkami na výběr mezi dvěma vítěznými tahy. Jeden tento vítězný tah je odebrat 4 sirky a dostat se do pozice $(40, 4)$ (přičemž $f(40) = 8$) a druhý je odebrat 12 sirek a dostat se do pozice $(32, 12)$ (přičemž $f(32) = 32$). Toto zde ale podrobněji analyzovat nebudeme a místo toho se raději zaměříme na řešení v obecném případě.

Pokud se podíváme na hodnoty funkce $f(n)$ vyplněné pro malá n v tabulce, můžeme si všimnout, že (alespoň pro tato malá n) hodnota $f(n)$ odpovídá maximální mocnině dvojky, která dělí (beze zbytku) číslo n . Toto nás vede k možné hypotéze o tom, jak by funkce $f(n)$ mohla vypadat. Tuto hypotézu je však třeba ještě ověřit a dokázat, že skutečně platí.

Při formulaci a následném ověřování této hypotézy budeme využívat jednoduchý fakt, že každé nenulové přirozené číslo n je možné rozložit na součin lichého čísla (tj. čísla tvaru $2a + 1$ pro nějaké $a \geq 0$) a mocniny dvojky (tj. čísla tvaru 2^i , kde $i \geq 0$) a že tento rozklad na liché číslo a mocninu dvojky je jednoznačný (tj. pokud $n = (2a + 1) \cdot 2^i$ a $n = (2a' + 1) \cdot 2^{i'}$ pro nějaká přirozená čísla a, i, a', i' , tak $a = a'$ a $i = i'$). Tento fakt je snad dostatečně intuitivně zřejmý (stačí si představit, jak číslo n postupně dělíme hodnotou 2, dokud nedosáhneme nějakého lichého čísla; s každým takovým vydělením se hodnota snižuje a přinejhorším musí tento postup skončit u čísla 1), pro úplnost však uveďme i formální důkaz tohoto tvrzení.

Tvrzení 7.1 Pro každé přirozené číslo $n \geq 1$ existuje právě jedna dvojice přirozených čísel a a i (kde $a \geq 0$ a $i \geq 0$) taková, že $n = (2a + 1) \cdot 2^i$.

Důkaz. Nejprve ukažme, že pro každé $n \geq 1$ existují nějaká a a i taková, že $n = (2a + 1) \cdot 2^i$. Důkaz postupuje indukcí podle n . Pro $n = 1$ stačí vzít $a = 0$ a $i = 0$, čímž je dokázána báze indukce. Přejdeme tedy k indukčnímu kroku a předpokládejme (jako indukční předpoklad), že

tvrzení platí pro všechny hodnoty menší než n , tj. že pro každé n' takové, že $1 \leq n' < n$, existují nějaká přirozená čísla a' a i' taková, že $n' = (2a' + 1) \cdot 2^{i'}$.

Předpokládejme, že $n > 1$. Číslo n je buď sudé nebo liché. Uvažujme nejprve případ, kdy je n liché. Pro každé liché n existuje nějaká hodnota a taková, že $n = 2a + 1$. Položíme-li $i = 0$, zjevně platí $n = (2a + 1) \cdot 2^i$. Uvažujme nyní případ, kdy je n sudé. V tom případě existuje nějaké n' takové, že $n = 2n'$ a $1 \leq n' < n$. Podle indukčního předpoklad existují a' a i' taková, že $n' = (2a' + 1) \cdot 2^{i'}$. Položme $a = a'$ a $i = i' + 1$. Pak platí $n = 2n' = 2 \cdot ((2a' + 1) \cdot 2^{i'}) = (2a' + 1) \cdot 2^{i'+1} = (2a + 1) \cdot 2^i$. Ukázali jsme, že v obou případech (n liché i n sudé) existují a a i taková, že $n = (2a + 1) \cdot 2^i$, čímž je tato část důkazu hotova.

Ukažme nyní, že hodnoty a a i takové, že $n = (2a + 1) \cdot 2^i$, jsou pro dané n určeny jednoznačně. Předpokládejme, že máme nějaká přirozená čísla a, i, a', i' taková, že $n = (2a + 1) \cdot 2^i$ a $n = (2a' + 1) \cdot 2^{i'}$. Uvažujme nejprve případ, kdy by platilo $i \neq i'$. V tom případě je buď $i < i'$ nebo $i > i'$.

Zaměříme se na případ, kdy $i < i'$. Pak by muselo platit $(2a + 1) \cdot 2^i = n = (2a' + 1) \cdot 2^{i'} = (2a' + 1) \cdot 2^{i'-i} \cdot 2^i$. Protože $2^i > 0$ (pro $i \geq 0$), muselo by pak platit $(2a + 1) = (2a' + 1) \cdot 2^{i'-i}$. Toto ale není možné, protože číslo $2a + 1$ je liché, zatímco číslo $(2a' + 1) \cdot 2^{i'-i}$ je sudé (protože číslo $2^{i'-i}$ je sudé, neboť $i' - i > 0$). Příklad $i < i'$ tedy nastat nemůže. Podobně by se ukázalo, že nemůže platit ani $i > i'$. Musí tedy platit $i = i'$.

Pokud ale $i = i'$, tak $(2a + 1) \cdot 2^i = (2a' + 1) \cdot 2^i$. A protože $2^i > 0$, tak z toho plyne, že $2a + 1 = 2a' + 1$, z čehož vyplývá, že $a = a'$. Vidíme tedy, že platí $a = a'$ a $i = i'$, čímž je důkaz hotov. \square

Uvažujme tedy funkci f definovanou následovně. Jak vyplývá z Tvrzení 7.1, k libovolnému n , kde $n \geq 1$, existují jednoznačně daná přirozená čísla a a i taková, že $n = (2a + 1) \cdot 2^i$. Hodnota $f(n)$ je pak pro takové n definována jako 2^i .

Abychom ověřili, že takto definovaná funkce f je tou „skutečnou“ funkcí f charakterizující rozdělení pozic na P- a N-pozice, stačí dokázat, že pro každé $n \geq 1$ platí následující:

Předpokládejme, že $n \geq 1$ a $n = (2a + 1) \cdot 2^i$ (podle Tvrzení 7.1 taková a a i existují a jsou určena jednoznačně). Potom pro libovolné $k \geq 1$ platí:

- pokud $k < 2^i$, tak (n, k) je P-pozice,
- pokud $k \geq 2^i$, tak (n, k) je N-pozice.

Toto se dokáže indukci podle n . Pro $n = 1$ tvrzení očividně platí, neboť $(1, k)$ je N-pozice pro libovolné $k \geq 1$ (pro $n = 1$ je $i = 0$ a nerovnost $k < 2^i$ neplatí pro žádné $k \geq 1$), protože v každé takové pozici je možné odebrat jednu sirku a přejít do koncové P-pozice $(0, 1)$.

Přejdeme tedy k indukčnímu kroku. Předpokládejme, že $n > 1$, že $n = (2a + 1) \cdot 2^i$ a že podle indukčního předpokladu pro libovolné n' , kde $1 \leq n' < n$, platí, že pokud $n' = (2a' + 1) \cdot 2^{i'}$, tak (n', k') je P-pozice, jestliže $k' < 2^{i'}$, a N-pozice, pokud $k' \geq 2^{i'}$.

- Uvažujme nejprve případ, kdy $k \geq 2^i$. V tomto případě musíme ukázat, že (n, k) je skutečně N-pozice, tj. že existuje nějaká P-pozice (n', k') taková, že $(n, k) \xrightarrow{x} (n', k')$ pro nějaké x . Připomeňme, že předpokládáme $n = (2a + 1) \cdot 2^i$. Zvolme tah, kdy odebereme 2^i sirek, tj. $x = 2^i$. Takový tah je v pozici (n, k) určitě možné provést, protože $1 \leq 2^i \leq k$ a $n \geq 2^i$ (neboť $2a + 1 \geq 1$). Tímto tahem se dostaneme do nějaké pozice (n', k') . Zjevně platí $k' = k - 2^i$. Dále platí

$$n' = n - x = (2a + 1) \cdot 2^i - 2^i = 2a \cdot 2^i + 2^i - 2^i = a \cdot 2^{i+1}.$$

Protože $a \geq 0$, tak buď $a = 0$ nebo $a > 0$. Pokud $a = 0$, tak $n' = 0$ a jsme hotovi, neboť $(0, 2^i)$ je koncová P-pozice. Uvažujme tedy případ, kdy $a > 0$. Podle Tvrzení 7.1 existují čísla b a j taková, že $a = (2b + 1) \cdot 2^j$, $b \geq 0$ a $j \geq 0$. V tomto případě je tedy

$$n' = a \cdot 2^{i+1} = (2b + 1) \cdot 2^j \cdot 2^{i+1} = (2b + 1) \cdot 2^{j+i+1}$$

a podle indukčního předpokladu je (n', k') P-pozice, jestliže $k' < 2^{j+i+1}$. Tato poslední nerovnost však očividně platí, neboť $k' = 2^i$, takže $k' = 1 \cdot 2^i < 2^{j+1} \cdot 2^i$, protože $2^i > 0$ a $1 < 2^{j+1}$ pro $j \geq 0$.

Vidíme tedy, že v obou případech ($a = 0$ i $a > 0$) vede tah, kdy odebereme 2^i sirek, do P-pozice.

- Zbývá analyzovat případ, kdy $k < 2^i$. V tomto případě musíme ukázat, že (n, k) je skutečně P-pozice, tj. že každá pozice (n', k') taková, že $(n, k) \xrightarrow{x} (n', k')$ pro nějaké x , je N-pozice, tedy, že podle indukčního předpokladu platí, že pokud $n' = (2a' + 1) \cdot 2^{i'}$, tak $k' \geq 2^{i'}$.

Předpokládejme tedy, že $n = (2a + 1) \cdot 2^i$, $k < 2^i$ a že $(n, k) \xrightarrow{x} (n', k')$. Podle Tvrzení 7.1 existují čísla b a j taková, že $x = (2b + 1) \cdot 2^j$. Očividně tedy platí $k' = x = (2b + 1) \cdot 2^j$.

Podle pravidel hry pro x také platí $1 \leq x \leq k$, takže $1 \leq x < 2^i$ (protože předpokládáme, že $k < 2^i$). Z toho vyplývá, že $j < i$, protože pokud by bylo $j \geq i$, tak by platilo $x \geq 2^i$ (protože, pokud $j \geq i$, tak $2^j \geq 2^i$, a pro každé $b \geq 0$ platí $2b + 1 \geq 1$, takže $x = (2b + 1) \cdot 2^j \geq 1 \cdot 2^j = 2^j \geq 2^i$).

Dále z $x < 2^i$ vyplývá, že $2b + 1 < 2^{i-j}$. Je tomu tak proto, že pokud by bylo $2b + 1 \geq 2^{i-j}$, platilo by $x = (2b + 1) \cdot 2^j \geq 2^{i-j} \cdot 2^j = 2^i$ (a tedy $x \geq 2^i$).

Hodnotu n' můžeme vyjádřit následujícím způsobem:

$$n' = n - x = (2a + 1) \cdot 2^i - (2b + 1) \cdot 2^j = ((2a + 1) \cdot 2^{i-j} - (2b + 1)) \cdot 2^j = z \cdot 2^j,$$

kde $z = (2a + 1) \cdot 2^{i-j} - (2b + 1) = 2a \cdot 2^{i-j} + 2^{i-j} - (2b + 1)$. Protože $2a \cdot 2^{i-j} \geq 0$ a $2^{i-j} > 2b + 1$, tak $z > 0$. Vzhledem k tomu, že hodnota $(2a + 1) \cdot 2^{i-j}$ je sudá (připomeňme, že $i > j$) a hodnota $(2b + 1)$ lichá, hodnota z , která je rozdílem těchto dvou hodnot, je lichá, tj. existuje nějaké přirozené číslo $c \geq 0$ takové, že $z = 2c + 1$. Podrobněji se to dá zdůvodnit takto:

$$z = 2a \cdot 2^{i-j} + 2^{i-j} - (2b + 1) = 2a \cdot 2^{i-j} + 2 \cdot 2^{i-j-1} - 2b - 2 + 1 = 2c + 1,$$

kde $c = a \cdot 2^{i-j} + 2^{i-j-1} - b - 1$.

Ukázali jsme tedy, že $n' = (2c + 1) \cdot 2^j$ a $k' = (2b + 1) \cdot 2^j$. Vzhledem k tomu, že $2b + 1 \geq 1$ pro libovolné $b \geq 0$, tak $k' = (2b + 1) \cdot 2^j \geq 1 \cdot 2^j = 2^j$. Platí tedy $k' \geq 2^j$, takže (n', k') je podle indukčního předpokladu N-pozice, což je to, co jsme chtěli dokázat.

Ukázali jsme tedy, že v dané hře je možné charakterizovat P- a N- pozice následovně: Všechny koncové pozice (tj. pozice tvaru (n, k) , kde $n = 0$) jsou P-pozice a nekoncové pozice (tj. pozice tvaru (n, k) , kde $n > 0$) jsou P-pozice, pokud $k < 2^i$, a N-pozice, pokud $k \geq 2^i$, kde $n = (2a + 1) \cdot 2^i$. Vítězná strategie vypadá tak, že v N-pozici se odebírá 2^i sirek. (V N-pozicích mohou ale existovat i další vítězné tahy. Pokud například máme pozici $(44, 43)$, vzhledem k tomu, že $44 = (2 \cdot 5 + 1) \cdot 2^2$, vítězným tahem je odebrat 2^2 sirek (tj. 4 sirky). Jak jsme ale viděli, existuje i další vítězný tah – odebrat 12 sirek.)

Analýzu zakončíme prozkoumáním toho, které počáteční pozice jsou P-pozice a které N-pozice. Připomeňme, že počáteční pozice s n sirkami je pozice $(n, n - 1)$. Předpokládejme, že $n = (2a + 1) \cdot 2^i$. Počáteční pozice bude N-pozice, pokud $n - 1 \geq 2^i$, a P-pozice, pokud $n - 1 < 2^i$. Potřebujeme tedy zjistit, pro které hodnoty n nastává každá z těchto dvou možností.

Protože $a \geq 0$, máme pro dané n dvě možnosti, buď $a = 0$ nebo $a \geq 1$.

Uvažujme nejprve případ, kdy $a = 0$. V tom případě je $n = 2^i$ a zjevně platí $n - 1 < 2^i$ (protože $n - 1 < n$). Počáteční pozice s n sirkami, kde n je mocnina dvojky, jsou tedy P-pozice.

Uvažujme nyní případ, kdy $a \geq 1$. Ukážeme, že v tomto případě je $n - 1 \geq 2^i$. Z $a \geq 1$ vyplývá, že $2a + 1 \geq 3$, a dále pro každé $i \geq 0$ platí $2^i \geq 1$. Z toho vyplývá, že

$$n - 1 = (2a + 1) \cdot 2^i - 1 \geq 3 \cdot 2^i - 1 = 2^{i+1} + 2^i - 1 \geq 2^{i+1} > 2^i.$$

Vidíme, že v těch počátečních pozicích, kde $a \geq 1$, platí dokonce ostrá nerovnost $n - 1 > 2^i$, a že takové pozice jsou N-pozice.

Počáteční pozice s n sirkami je tedy P-pozice právě tehdy, když n je mocninou dvojky (a N-pozice v opačném případě).

Literatura

- [1] Martin Aigner and Günter M. Ziegler. *Proofs from The Book*. Springer-Verlag, 3rd edition, 2004.
- [2] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. *Introduction to Algorithms*. MIT Press, 2nd edition, 2001.
- [3] Thomas S. Ferguson. *Game Theory*. University of California at Los Angeles. Dostupné na adrese <http://www.math.ucla.edu/~tom/math167.html>.
- [4] Thomas S. Ferguson. *Linear Programming: A Concise Introduction*. University of California at Los Angeles. Dostupné na adrese <http://www.math.ucla.edu/~tom/LP.pdf>.
- [5] Aviezri S. Fraenkel. Complexity, appeal and challenges of combinatorial games. *Theoretical Computer Science*, 313(3):393–415, 2004.
- [6] Noam Nisan, Tim Roughgarden, Eva Tardos, and Vijay V. Vazirani, editors. *Algorithmic Game Theory*. Cambridge University Press, 2007. Elektronická verze je dostupná na adrese <http://www.cambridge.org/journals/nisan/downloads/NisanNon-printable.pdf>.
- [7] Lloyd S. Shapley. A note on the Lemke-Howson algorithm. 1974.