

Cvičení 2

Příklad 1: Navrhněte a detailně popište *univerzální Turingův stroj* $\mathcal{U}$, u kterého se předpokládá, že bude jako vstup dostávat slova tvaru $u\#v$, kde u je kódem nějakého libovolného jednopáskového Turingova stroje $\mathcal{M}$ a v je vstupem pro tento stroj $\mathcal{M}$.

Pro jednoduchost se můžete omezit na případ, kdy se předpokládá, že stroje $\mathcal{M}$ pracují s páskovou abecedou $\Gamma = \{0, 1, \square\}$ a vstupní abecedou $\Sigma = \{0, 1\}$ a v jsou slova nad touto abecedou Σ .

Co by bylo potřeba upravit, aby stroj $\mathcal{U}$ byl schopen simulovat činnost Turingova stroje $\mathcal{M}$ s libovolnou páskovou abecedou Γ a libovolnou vstupní abecedou Σ ?

Příklad 2: Vysvětlete, co udělá univerzální Turingův stroj $\mathcal{U}$, pokud dostane jako vstup slovo tvaru $u\#v$, kde slovo u je kódem stroje $\mathcal{U}$.

Příklad 3: Uvažujme následující problém:

NÁZEV: UHP (*Uniform Halting Problem*)

VSTUP: Turingův stroj $\mathcal{M}$.

OTÁZKA: Zastaví se $\mathcal{M}$ pro každý vstup halt for every input?

Zjistěte, zda je tento problém rozhodnutelný či nerozhodnutelný, a své zjištění prokažte. V případě rozhodnutelnosti problému ukažte algoritmus, který jej řeší; v případě nerozhodnutelnosti můžete vyjít z nerozhodnutelnosti problému zastavením a ukázat příslušnou převeditelnost.

Příklad 4: Připomeňme si problém *kachličkování roviny*, který byl uveden na přednášce, kde byla ukázána jeho nerozhodnutelnost.

Tento problém může být definován následovně. Řekněme, že C je nějaká konečná množina barev. Množina $\{N, S, E, W\}$ představuje čtyři směry — sever, jih, východ, západ. Typ kachličky je dán jako přiřazení barev jednotlivým směrům, tj. jako funkce $\tau : \{N, S, E, W\} \rightarrow C$.

Předpokládejme, že máme danu množinu typů kachlíček

$$\mathcal{T} = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}.$$

Pokrytí roviny kachličkami je funkce $p : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{T}$ splňující následující dvě podmínky pro každé $i, j \in \mathbb{Z}$:

- Pokud $p(i, j) = \tau$ a $p(i + 1, j) = \tau'$, tak $\tau(E) = \tau'(W)$.
- Pokud $p(i, j) = \tau$ a $p(i, j + 1) = \tau'$, tak $\tau(N) = \tau'(S)$.

Uvažujme nyní následující problém:

VSTUP: Množina typů kachlíček $\mathcal{T} = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$.

OTÁZKA: Existuje nějaké pokrytí roviny p kachličkami z množiny $\mathcal{T}$?

O tomto problému je známo, že je algoritmicky nerozhodnutelný.

Bude nerozhodnutelná i varianta tohoto problému, kde bychom dodali omezení, že počet barev, tj. velikost množiny C nesmí být větší než nějaká pevně zadaná konstanta k (např. že není možné použít více než 100 barev)?

Vaši odpověď zdůvodněte.

Příklad 5: Ukažte, že následující problém není algoritmicky rozhodnutelný:

VSTUP: Dva Turingovy stroje $\mathcal{M}_1$ a $\mathcal{M}_2$.

OTÁZKA: Je $\mathcal{L}(\mathcal{M}_1) = \mathcal{L}(\mathcal{M}_2)$?

Je tento problém nebo jeho doplňkový problém částečně rozhodnutelný?

Příklad 6: Ukažte, že následující problém není algoritmicky rozhodnutelný:

VSTUP: Bezkontextové gramatiky $\mathcal{G}_1$ a $\mathcal{G}_2$.

OTÁZKA: Je $\mathcal{L}(\mathcal{G}_1) \cap \mathcal{L}(\mathcal{G}_2) = \emptyset$?

Nápověda: Použijte redukci z Postova korespondenčního problému.

Je tento problém nebo jeho doplňkový problém částečně rozhodnutelný?

Příklad 7: Ukažte, že následující problém není algoritmicky rozhodnutelný:

VSTUP: Bezkontextová gramatika $\mathcal{G}$.

OTÁZKA: Je $\mathcal{G}$ nejednoznačná?

Nápověda: Použijte redukci z Postova korespondenčního problému.

Je tento problém nebo jeho doplňkový problém částečně rozhodnutelný?

Příklad 8: Uvažujme dva následující problémy:

VSTUP: Bezkontextová gramatika $\mathcal{G}$ generující jazyk nad abecedou Σ .

OTÁZKA: Je $\mathcal{L}(\mathcal{G}) = \Sigma^*$?

VSTUP: Bezkontextové gramatiky $\mathcal{G}_1$ a $\mathcal{G}_2$.

OTÁZKA: Je $\mathcal{L}(\mathcal{G}_1) = \mathcal{L}(\mathcal{G}_2)$?

a) Ukažte, že první z těchto problémů je převeditelný na druhý.

- b) Ukažte, jak převést Halting problem na doplňkový problém prvního z těchto dvou problémů.
- c) Uveďte, které z těchto dvou problémů či jejich doplňkových problémů jsou částečně rozhodnutelné.

Příklad 9: Připomeňte si, jak vypadají formule predikátové logiky prvního řádu, a co to znamená, že daná formule je uzavřená.

Připomeňte si také, co to znamená, že daná formule je *logicky platná*, tj. pravdivá v každé interpretaci.

Ukažte, že následující problém není algoritmicky rozhodnutelný:

VSTUP: Uzavřená formule φ predikátové logiky prvního řádu.

OTÁZKA: Je formule φ logicky platná?

Nápověda: Použijte redukci z Postova korespondenčního problému.

Příklad 10: *Lineárně omezený automat* je speciálním případem Turingova stroje s jednou páskou, kde tato páska ovšem není nekonečná, ale je omezena velikostí vstupního slova. Páska vypadá tak, že tvořena políčky, které obsahují vstupní slovo w , které je zleva a zprava ohraničeno speciálními „zarážkami“ $\vdash$ a $\dashv$. Na levé zarážce $\vdash$ se hlava nesmí pohnout doleva a na pravé zarážce $\dashv$ zase doprava. Tyto zarážky není možné přepsat, všechna ostatní políčka (která na začátku obsahují symboly vstupního slova) však ano.

Jazyk $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ slov přijímaných daným lineárně omezeným automatem $\mathcal{M}$ je definován podobně jako v případě běžných Turingových strojů.

Uvažujme následující dva problémy:

VSTUP: Lineárně omezený automat $\mathcal{M}$ a slovo w .

OTÁZKA: Přijímá automat $\mathcal{M}$ slovo w , tj. platí $w \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$?

VSTUP: Lineárně omezený automat $\mathcal{M}$.

OTÁZKA: Existuje nějaké slovo w přijímané automatem $\mathcal{M}$, tj. platí $\mathcal{L}(\mathcal{M}) \neq \emptyset$?

Určete, které z těchto problémů jsou rozhodnutelné a které ne.

U problémů, které nejsou rozhodnutelné, je daný problém nebo jeho doplňkový problém částečně rozhodnutelný?

Příklad 11: Uvažujme stroj s řídicí jednotkou s konečným počtem stavů a jedním čítačem. Tento stroj čte vstup ze vstupní pásky, která je pouze pro čtení, její obsah tedy není možné měnit. S hlavou na vstupní pásce je však možné hýbat oběma směry, přičemž slovo na této pásce je zleva a zprava ohraničeno zarážkami $\vdash$ a $\dashv$.

Obsahem čítače může být libovolně velké přirozené číslo. Hodnotu čítače je možné v jednom kroku zvýšit či snížit o jedna nebo ji nechat beze změny a je také možné testovat, zda je hodnota čítače rovna 0.

Definujte formálně tento druh stroje a definujte, co to znamená, že tento stroj přijímá dané slovo w .

Ukažte, že následující problém není algoritmicky rozhodnutelný:

VSTUP: Stroj $\mathcal{M}$ s jedním čítačem.

OTÁZKA: Existuje nějaké slovo w přijímané strojem $\mathcal{M}$, tj. platí $\mathcal{L}(\mathcal{M}) \neq \emptyset$?

Příklad 12: Uved'te příklad nerozhodnutelného problému, který je převeditelný na svůj vlastní doplňkový problém.

Příklad 13: Uved'te alespoň tři vlastnosti Turingových strojů, pro něž plyne nerozhodnutelnost z Riceovy věty, a alespoň tři vlastnosti, pro něž nerozhodnutelnost z Riceovy věty neplyne.