Cvičení 7

Příklad 1: Ukažte, že následující problémy je možné řešit deterministickým algoritmem s logaritmickou prostorovou složitostí (tj. s prostorovou složitostí $\mathcal{O}(\log n)$, kde n je velikost vstupu).

Poznámka: Předpokládejte, že všechna čísla ve vstupech i výstupech jsou reprezentována binárně, tj. jako sekvence bitů.

a) VSTUP: Dvojice přirozených čísel x a y.
VÝSTUP: Hodnota součtu $x + y$.

b) VSTUP: Posloupnost přirozených čísel $x_1, x_2, \dots, x_k$.
VÝSTUP: Hodnota součtu $x_1 + x_2 + \cdots + x_k$.

Poznámka: Jako velikost vstupu uvažujte celkový počet bitů nutných k zápisu všech čísel posloupnosti $x_1, x_2, \dots, x_k$.

c) VSTUP: Dvojice přirozených čísel x a y.
VÝSTUP: Hodnota součinu $x \cdot y$.

d) VSTUP: Slovo w tvořené různými druhy závorek ($[_1,]_1, [_2,]_2, \dots, [_r,]_r$).
OTÁZKA: Jedná se o správně uzávorkovanou posloupnost?

Poznámka: Správně uzávorkovanou posloupností se zde myslí posloupnost patřící do jazyka generovaného následující bezkontextovou gramatikou:

$$A \longrightarrow \varepsilon \mid AA \mid [_1 A]_1 \mid [_2 A]_2 \mid \cdots \mid [_r A]_r$$

Příklad 2: Ukažte, že následující problémy jsou NL-úplné:

a) VSTUP: Nedeterministický konečný automat $\mathcal{A}$ a slovo w.
OTÁZKA: Přijímá automat $\mathcal{A}$ slovo w (tj. platí $w \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$)?

b) VSTUP: Deterministický konečný automat $\mathcal{A}$.
OTÁZKA: Je $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \emptyset$?

c) VSTUP: Deterministický konečný automat $\mathcal{A}$.
OTÁZKA: Je $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \Sigma^*$?

d) VSTUP: Deterministické konečné automaty $\mathcal{A}_1$ a $\mathcal{A}_2$.
OTÁZKA: Je $\mathcal{L}(\mathcal{A}_1) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$?

e) VSTUP: Orientovaný graf G.
OTÁZKA: Je graf G silně souvislý?

Poznámka: Graf je silně souvislý, jestliže pro každou dvojici jeho vrcholů u a v existuje cesta z u do v.

f) VSTUP: Konečná množina X, asociativní binární operace $\circ$ na množině X (zadaná tabulkou specifikující hodnotu $x \circ y$ pro každou dvojici $x, y \in X$), podmnožina $S \subseteq X$ a prvek $t \in X$.

OTÁZKA: Je možné prvek t vygenerovat z prvků množiny S ?

Poznámka: Prvek t je možné vygenerovat z prvků množiny S, jestliže existuje posloupnost $x_1, x_2, \ldots, x_k$ prvků z množiny S taková, že

$$t = x_1 \circ x_2 \circ \cdots \circ x_k$$

Příklad 3: Ukažte, že následující problémy jsou P-úplné.

Nápověda: P-obtížnost těchto problémů můžete ukázat například pomocí logspace redukcí z problému Monotone Circuit Value Problem (MCVP).

a) VSTUP: Kombinatorická hra dvou hráčů, jejíž graf je explicitně dán, tj. jsou explicitně vyjmenovány jednotlivé pozice a možné tahy. U každé pozice je uvedeno, který z hráčů je na tahu. Je uvedena počáteční pozice α.

OTÁZKA: Má *Hráč I* v dané hře, která začne v pozici α, vyhrávající strategii?

b) VSTUP: Bezkontextová gramatika $\mathcal{G}$ a slovo $w \in \Sigma^*$.

OTÁZKA: Patří slovo w do jazyka generovaného gramatikou $\mathcal{G}$ (tj. platí $w \in \mathcal{L}(\mathcal{G})$) ?

c) VSTUP: Bezkontextová gramatika $\mathcal{G}$.

OTÁZKA: Platí $\mathcal{L}(\mathcal{G}) = \emptyset$?

d) VSTUP: Bezkontextová gramatika $\mathcal{G}$.

OTÁZKA: Je $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ nekonečný?

e) VSTUP: Konečná množina X, binární operace $\circ$ na množině X (zadaná tabulkou specifikující hodnotu $x \circ y$ pro každou dvojici $x, y \in X$), podmnožina $S \subseteq X$ a prvek $t \in X$.

OTÁZKA: Je možné prvek t vygenerovat z prvků množiny S ?

Poznámka: Prvek t je možné vygenerovat z prvků množiny S, jestliže existuje nějaký výraz skládající se z konstant reprezentujících prvky z množiny S, na které je libovolným způsobem aplikována operace $\circ$, a hodnota tohoto výrazu je t.

Jiným způsobem se to dá říct také tak, že prvek t patří do nejmenší množiny Y (kde $Y \subseteq X$), která splňuje dvě následující podmínky:

- $S \subseteq Y$
- pro každé dva prvky $x, y \in Y$ platí, že $x \circ y \in Y$.