Cvičení 1

Příklad 1: Pro každý z následujících jazyků uveďte nějakých 5 slov, která do něj patří, a nějakých 5 slov, která do něj nepatří.

a) $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{délka slova } w \text{ je menší než } 5\}$

Řešení: Slova z jazyka L_1 jsou např. ε, 0, 1, 00, 01, atd. Do jazyka L_1 nepatří např. 00000, 00001, 00010, 000000, 1111111.

b) $L_2 = \{w \in \{a,b\}^* \mid \text{počet výskytů symbolu b ve slově } w \text{ je sudý}\}$

Řešení: Slova z jazyka L_2 jsou např. ε, a, aa, bb, aaa, abb, atd. Do jazyka L_2 nepatří např. b, ab, ba, aab, aba.

c) $L_3 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{ve } w \text{ je každá 0 (přímo) následována 1}\}$

Řešení: Slova z jazyka L_3 jsou např. ε, 1, 01, 11, 101101, atd. Do jazyka L_3 nepatří např. 0, 10, 001, 010, 1010.

d) $L_4 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ začíná a končí stejným symbolem}\}$

Řešení: Slova z jazyka L_4 jsou např. 0, 1, 00, 11, 000, 010, atd. Do jazyka L_4 nepatří např. ε, 01, 10, 001, 011.

e) $L_5 = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ obsahuje jako podslovo sekvenci abb}\}$

Řešení: Slova z jazyka L_5 jsou např. abb, aabb, abba, abbb, babb, atd. Do jazyka L_5 nepatří např. ε, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa.

Příklad 2: Předpokládejme, že $\Sigma = \{a,b\}$ a $n \in \mathbb{N}$.

a) Kolik existuje slov ze Σ^* délky n?

Řešení: 2^n

b) Kolik existuje slov ze Σ^* délky nejvýše n?

Řešení:

$$2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n = \sum_{i=0}^{n} 2^i = \frac{2^{n+1}-1}{2-1} = 2^{n+1}-1$$

Příklad 3: Uvažujme následující jazyky:

$L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{ve } w \text{ je každá 0 (přímo) následována 1}\}$
$L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = w^R\}$

a) Vyjmenujte prvních 5 slov z každého z jazyků L_1, L_2 (nejmenších vzhledem k uspořádání $<_L$).

Řešení:

L_1: ε, 1, 01, 11, 011
L_2: ε, 0, 1, 00, 11

b) Vyjmenujte prvních 5 slov z každého z jazyků $\overline{L_1}$, $\overline{L_2}$.

Řešení:

$\overline{L_1}$: 0, 00, 10, 000, 001
$\overline{L_2}$: 01, 10, 001, 011, 100

c) Vyjmenujte prvních 5 slov z jazyka $L_1 \cap L_2$.

Řešení:

$L_1 \cap L_2$: ε, 1, 11, 101, 111

d) Vyjmenujte prvních 5 slov z jazyka $L_1 \cup L_2$.

Řešení:

$L_1 \cup L_2$: ε, 0, 1, 00, 01

Příklad 4: Pro každou z následujících dvojic jazyků L_1 a L_2 vypište všechna slova ve zřetězení těchto jazyků, tj. v jazyce $L_1 \cdot L_2$:

a) $L_1 = \{\varepsilon, abb, bba\}$, $L_2 = \{a, b, abba\}$

Řešení: $L_1 \cdot L_2 = \{a, b, abba, abbb, abbabba, bbaa, bbab, bbaabba\}$

b) $L_1 = \{0, 001, 111\}$, $L_2 = \{\varepsilon, 01, 0101\}$

c) $L_1 = \{aa, aaaa, aaaaa, aaaaaa\}$, $L_2 = \{aa, aaa\}$

d) $L_1 = \emptyset$, $L_2 = \{011, 1111, 010101\}$

e) $L_1 = \{\varepsilon, a, ba, baa\}$, $L_2 = \{\varepsilon\}$

Příklad 5: Uvažujme jazyky nad abecedou $\{0, 1\}$. Popište (slovně) jazyk vzniklý iterací $\{00, 111\}^*$ a vyjmenujte prvních 10 slov z tohoto jazyka.

Řešení: Je to jazyk všech těch slov, která mají úseky nul sudé délky a úseky jedniček délky dělitelné třemi.
Prvních deset slov je: $\varepsilon, 00, 111, 0000, 00111, 11100, 000000, 111111, 0000111, 0011100$

Příklad 6: Uvažujme následující jazyky:

$$L_1 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_1 \leq 1\}$$
$$L_2 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w = w^R\}$$

Popište, jak vypadají slova v jazyce $L_1 \cap L_2$.

Řešení: Slova ze samých nul nebo ta slova, která mají jediný znak 1 právě uprostřed, tj. ε, 0, 00, 000, ..., 1, 010, 00100, ...

Příklad 7: Určete, která z následujících tvrzení obecně platí pro jakékoli jazyky. V případě, že dané tvrzení obecně platí, zdůvodněte, proč tomu tak je. V případě, že neplatí, uveďte konkrétní příklady jazyků, pro které dané tvrzení neplatí:

a) $L_1 \cdot L_2 = L_2 \cdot L_1$

   Řešení: Obecně neplatí.

b) $L_1 \cdot (L_2 \cdot L_3) = (L_1 \cdot L_2) \cdot L_3$

   Řešení: Platí.

c) $L_1 \cdot (L_2 \cup L_3) = L_1 \cdot L_2 \, \cup \, L_1 \cdot L_3$

   Řešení: Platí.

d) $L_1 \cdot (L_2 \cap L_3) = L_1 \cdot L_2 \, \cap \, L_1 \cdot L_3$

   Řešení: Obecně neplatí.

e) $(L_1 \cup L_2)^* = L_1^* \cup L_2^*$

   Řešení: Obecně neplatí.

Příklad 8: Popište alespoň 5 různých uspořádání na množině všech slov nad abecedou $\{0, 1\}$. U každého z nich ukažte, že jde skutečně o uspořádání, tj. reflexivní, tranzitivní a antisymetrickou relaci v případě neostrého uspořádání nebo tranzitivní a asymetrickou relaci v případě ostrého uspořádání, a dále pak detailně popište vlastnosti daného uspořádání (např. zda jde o úplné nebo částečné uspořádání, zda existuje nejmenší nebo největší prvek, jaké prvky jsou minimální nebo maximální, zda v daném uspořádání existují nekonečné klesající nebo nekonečné rostoucí posloupnosti apod.)

Řešení: Například následující uspořádání $\sqsubseteq_1$, ..., $\sqsubseteq_5$:

a) být prefixem: $x \sqsubseteq_1 y$ iff $\exists z \in \Sigma^* : xz = y$

b) být podslovem: $x \sqsubseteq_2 y$ iff $\exists z_1, z_2 \in \Sigma^* : z_1 x z_2 = y$

c) být podsekvencí: $x \sqsubseteq_3 y$ iff $\exists k \geq 1 : \exists x_1, x_2, \ldots, x_k, u_1, u_2, \ldots, u_{k+1} \in \Sigma^* : x = x_1 x_2 \cdots x_k \wedge y = u_1 x_1 u_2 x_2 u_3 \cdots u_k x_k u_{k+1}$

d) lexikografické uspořádání: $x \sqsubseteq_4 y$ iff $x \sqsubseteq_1 y$ nebo $\exists a, b \in \Sigma : \exists u, v, w \in \Sigma^* : x = uav \wedge y = ubw \wedge a < b$ (bereme nějaké fixní uspořádání $<$ na symbolech abecedy Σ; konkrétně pro $\Sigma = \{0, 1\}$ např. $0 < 1$)

e) uspořádání podle velikosti a rámci stejné délky lexikograficky (na přednášce definováno jako $<_L$): $x \sqsubseteq_5 y$ iff $|x| < |y| \ \vee \ (|x| = |y| \wedge x \sqsubseteq_4 y)$