

## Cvičení 1

**Příklad 1:** Pro každý z následujících jazyků uveďte nějakých 5 slov, která do něj patří, a nějakých 5 slov, která do něj nepatří.

a)  $L_1 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \text{délka slova } w \text{ je menší než } 5\}$

*Řešení:* Slova z jazyka  $L_1$  jsou např.  $\varepsilon, 0, 1, 00, 01$ , atd. Do jazyka  $L_1$  nepatří např.  $00000, 00001, 00010, 000000, 1111111$ .

b)  $L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \text{počet výskytů symbolu } b \text{ ve slově } w \text{ je sudý}\}$

*Řešení:* Slova z jazyka  $L_2$  jsou např.  $\varepsilon, a, aa, bb, aaa, abb$ , atd. Do jazyka  $L_2$  nepatří např.  $b, ab, ba, aab, aba$ .

c)  $L_3 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \text{ve } w \text{ je každá } 0 \text{ (přímo) následována } 1\}$

*Řešení:* Slova z jazyka  $L_3$  jsou např.  $\varepsilon, 1, 01, 11, 101101$ , atd. Do jazyka  $L_3$  nepatří např.  $0, 10, 001, 010, 1010$ .

d)  $L_4 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ začíná a končí stejným symbolem}\}$

*Řešení:* Slova z jazyka  $L_4$  jsou např.  $0, 1, 00, 11, 000, 010$ , atd. Do jazyka  $L_4$  nepatří např.  $\varepsilon, 01, 10, 001, 011$ .

e)  $L_5 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ obsahuje jako podslovo sekvenci } abb\}$

*Řešení:* Slova z jazyka  $L_5$  jsou např.  $abb, aabb, abba, abbb, babb$ , atd. Do jazyka  $L_5$  nepatří např.  $\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa$ .

**Příklad 2:** Předpokládejme, že  $\Sigma = \{a, b\}$  a  $n \in \mathbb{N}$ .

a) Kolik existuje slov ze  $\Sigma^*$  délky  $n$ ?

*Řešení:*  $2^n$

b) Kolik existuje slov ze  $\Sigma^*$  délky nejvýše  $n$ ?

*Řešení:*

$$2^0 + 2^1 + \dots + 2^n = \sum_{i=0}^n 2^i = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$$

**Příklad 3:** Uvažujme následující jazyky:

$$L_1 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \text{ve } w \text{ je každá } 0 \text{ (přímo) následována } 1\}$$

$$L_2 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w = w^R\}$$

a) Vyjmenujte prvních 5 slov z každého z jazyků  $L_1, L_2$  (nejmenších vzhledem k uspořádání  $<_L$ ).

*Řešení:*

$$L_1: \varepsilon, 1, 01, 11, 011$$

$$L_2: \varepsilon, 0, 1, 00, 11$$

b) Vyjmenujte prvních 5 slov z každého z jazyků  $\overline{L_1}$ ,  $\overline{L_2}$ .

*Řešení:*

$\overline{L_1}$ : 0, 00, 10, 000, 001

$\overline{L_2}$ : 01, 10, 001, 011, 100

c) Vyjmenujte prvních 5 slov z jazyka  $L_1 \cap L_2$ .

*Řešení:*

$L_1 \cap L_2$ :  $\varepsilon$ , 1, 11, 101, 111

d) Vyjmenujte prvních 5 slov z jazyka  $L_1 \cup L_2$ .

*Řešení:*

$L_1 \cup L_2$ :  $\varepsilon$ , 0, 1, 00, 01

**Příklad 4:** Pro každou z následujících dvojic jazyků  $L_1$  a  $L_2$  vypište všechna slova ve zřetězení těchto jazyků, tj. v jazyce  $L_1 \cdot L_2$ :

a)  $L_1 = \{\varepsilon, abb, bba\}$ ,  $L_2 = \{a, b, abba\}$

*Řešení:*  $L_1 \cdot L_2 = \{a, b, abba, abbb, abbabba, bbaa, bbab, bbaabba\}$

b)  $L_1 = \{0, 001, 111\}$ ,  $L_2 = \{\varepsilon, 01, 0101\}$

c)  $L_1 = \{aa, aaaa, aaaaa, aaaaaa\}$ ,  $L_2 = \{aa, aaa\}$

d)  $L_1 = \emptyset$ ,  $L_2 = \{011, 1111, 010101\}$

e)  $L_1 = \{\varepsilon, a, ba, baa\}$ ,  $L_2 = \{\varepsilon\}$

**Příklad 5:** Uvažujme jazyky nad abecedou  $\{0, 1\}$ . Popište (slovně) jazyk vzniklý iterací  $\{00, 111\}^*$  a vyjmenujte prvních 10 slov z tohoto jazyka.

*Řešení:* Je to jazyk všech těch slov, která mají úseky nul sudé délky a úseky jedniček délky dělitelné třemi.

Prvních deset slov je:  $\varepsilon, 00, 111, 0000, 00111, 11100, 000000, 111111, 0000111, 0011100$

**Příklad 6:** Uvažujme následující jazyky:

$L_1 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_1 \leq 1\}$

$L_2 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w = w^R\}$

Popište, jak vypadají slova v jazyce  $L_1 \cap L_2$ .

*Řešení:* Slova ze samých nul nebo ta slova, která mají jediný znak 1 právě uprostřed, tj.  $\varepsilon$ , 0, 00, 000,  $\dots$ , 1, 010, 00100,  $\dots$

**Příklad 7:** Určete, která z následujících tvrzení obecně platí pro jakékoli jazyky. V případě, že dané tvrzení obecně platí, zdůvodněte, proč tomu tak je. V případě, že neplatí, uveďte konkrétní příklady jazyků, pro které dané tvrzení neplatí:

a)  $L_1 \cdot L_2 = L_2 \cdot L_1$

*Řešení:* Obecně neplatí.

b)  $L_1 \cdot (L_2 \cdot L_3) = (L_1 \cdot L_2) \cdot L_3$

*Řešení:* Platí.

c)  $L_1 \cdot (L_2 \cup L_3) = L_1 \cdot L_2 \cup L_1 \cdot L_3$

*Řešení:* Platí.

d)  $L_1 \cdot (L_2 \cap L_3) = L_1 \cdot L_2 \cap L_1 \cdot L_3$

*Řešení:* Obecně neplatí.

e)  $(L_1 \cup L_2)^* = L_1^* \cup L_2^*$

*Řešení:* Obecně neplatí.

**Příklad 8:** Popište alespoň 5 různých uspořádání na množině všech slov nad abecedou  $\{0, 1\}$ . U každého z nich ukažte, že jde skutečně o uspořádání, tj. reflexivní, tranzitivní a antisymetrickou relaci v případě neostrého uspořádání nebo tranzitivní a asymetrickou relaci v případě ostrého uspořádání, a dále pak detailně popište vlastnosti daného uspořádání (např. zda jde o úplné nebo částečné uspořádání, zda existuje nejmenší nebo největší prvek, jaké prvky jsou minimální nebo maximální, zda v daném uspořádání existují nekonečné klesající nebo nekonečné rostoucí posloupnosti apod.)

*Řešení:* Například následující uspořádání  $\sqsubseteq_1, \dots, \sqsubseteq_5$ :

a) být prefixem:  $x \sqsubseteq_1 y$  iff  $\exists z \in \Sigma^* : xz = y$

b) být podslovem:  $x \sqsubseteq_2 y$  iff  $\exists z_1, z_2 \in \Sigma^* : z_1 x z_2 = y$

c) být podsekvencí:  $x \sqsubseteq_3 y$  iff  $\exists k \geq 1 : \exists x_1, x_2, \dots, x_k, u_1, u_2, \dots, u_{k+1} \in \Sigma^* : x = x_1 x_2 \dots x_k \wedge y = u_1 x_1 u_2 x_2 u_3 \dots u_k x_k u_{k+1}$

d) lexikografické uspořádání:  $x \sqsubseteq_4 y$  iff  $x \sqsubseteq_1 y$  nebo  $\exists a, b \in \Sigma : \exists u, v, w \in \Sigma^* : x = uav \wedge y = ubw \wedge a < b$  (bereme nějaké fixní uspořádání  $<$  na symbolech abecedy  $\Sigma$ ; konkrétně pro  $\Sigma = \{0, 1\}$  např.  $0 < 1$ )

- e) uspořádání podle velikosti a rámci stejné délky lexikograficky (na přednášce definováno jako  $<_L$ ):  $x \sqsubseteq_5 y$  iff  $|x| < |y| \vee (|x| = |y| \wedge x \sqsubseteq_4 y)$