Cvičení 2

Příklad 1: Vezměme si následující atomické výroky:

p — *„svítí slunce“*
q — *„prší“*
r — *„je vidět duha“*
s — *„sněží“*

V přirozené řeči řekněte, co tvrdí následující výroky zapsané formulemi výrokové logiky:

a) $(p \wedge q) \rightarrow r$
b) $p \rightarrow (\neg q \wedge \neg s)$
c) $\neg\neg r$
d) $(p \vee q) \vee s$
e) $q \rightarrow q$
f) $\neg s \rightarrow q$
g) $(\neg r \wedge q) \leftrightarrow \neg s$
h) $\neg(\neg p \rightarrow \neg q)$

Příklad 2: Zapište následující výroky pomocí formulí výrokové logiky (u každé formule přesně specifikujte, co jsou jednotlivé atomické výroky):

a) Jestliže dnes není pondělí, tak pozítří nebude středa.
b) Jestliže je dnes pondělí nebo středa a pozítří není pátek, tak je dnes pondělí.
c) Dnes není pondělí ani čtvrtek.

Určete, v které dny v týdnu jsou jednotlivé výroky pravdivé a v které nepravdivé.

Příklad 3: Zapište následující výroky pomocí formulí výrokové logiky (u každé formule přesně specifikujte, co jsou jednotlivé atomické výroky):

a) V případě, že poklesne tlak, tak bude pršet nebo sněžit.
b) Jestliže přijde paket s požadavkem, bude tento požadavek vyřízen a bude odeslán paket s potvrzením, nebo bude odeslán paket s informací o chybě.
c) Když nebudou nalezena nová ložiska ropy a nastane krize na blízkém východě, cena ropy na světových trzích stoupne.
d) Pokud si pan Novák koupil nové auto a neprodal staré, tak už splatil hypotéku nebo si vzal další půjčku.
e) Sestra má modrý kabát a bílý kabát.
f) Jestliže John půjde k soudu a bude vypovídat podle skutečnosti, bude na něj podáno trestní oznámení, a když k soudu nepůjde, také na něj bude podáno trestní oznámení.
g) To, že číslo x je prvočíslo a je větší než 2, je postačující podmínkou pro to, aby x bylo liché.
h) Nutnou podmínkou pro to, aby posloupnost konvergovala, je to, že je zdola i shora omezená.
i) Tato částka bude zaplacena tehdy a jen tehdy, když bude dodáno zboží v náležité kvalitě.
j) Jestliže je x kladné, pak je i x^2 kladné.
k) Pokud není trojúhelník ABC rovnoramenný, pak není ani rovnostranný.

l) Graf G je planární právě tehdy, když neobsahuje jako svůj podgraf podrozdělení grafu K_5 ani podrozdělení grafu $K_{3,3}$.
m) Není pravda, že když tento kandidát nebude zvolen prezidentem, tak nedojde ke zhoršení hospodářské situace.
n) Jestliže pachatel zfalšoval tento dokument, podplatil taxikáře a nezahladil všechny stopy na místě činu, budou proti němu nalezeny usvědčující důkazy.

Příklad 4: Vezměme si následující tři výroky:

p — *„Praha má více obyvatel než Liberec“*
q — *„Karlovy Vary se nachází na západě České republiky“*
r — *„Labe protéká Českými Budějovicemi“*

(Výroky p a q jsou tedy pravdivé a výrok r nepravdivý.)
Které z následujících výroků jsou pravdivé a které nepravdivé? (Zformulujte tyto výroky rovněž v přirozené řeči.)

a) $p \vee r$
b) $p \wedge r$
c) $\neg p \wedge \neg r$
d) $p \leftrightarrow (\neg q \vee r)$
e) $(q \vee \neg r) \to p$
f) $(q \vee p) \to (q \to \neg r)$
g) $(q \leftrightarrow \neg p) \leftrightarrow (p \leftrightarrow r)$
h) $(q \to p) \to ((p \to \neg r) \to (\neg r \to q))$

Příklad 5: Pro každou z následujících sekvencí symbolů proveďte následující:

a) Určete, zda se jedná o dobře utvořenou formuli výrokové logiky (podle formální definice).
b) Určete, zda se jedná o dobře utvořenou formuli výrokové logiky, pokud je možno používat konvence pro vypouštění závorek.
c) Pokud se jedná o dobře utvořenou formuli (ať už podle bodu (a) nebo bodu (b)):
   - Napište příslušnou formuli přesně podle formální definice (bez vypouštění závorek).
   - Napište příslušnou formuli s vypuštěním všech závorek, které je možno podle konvencí vypustit.
   - Nakreslete příslušný abstraktní syntaktický strom.

(Vaše odpovědi v bodech (a) a (b) zdůvodněte.)

1. $)(p)\neg \wedge \wedge$
2. $\forall x : q(x) \wedge r(x, x)$
3. p
4. $(\neg(\neg q))$
5. $(\neg(\neg q()))$
6. $(\neg(\neg)q)$
7. $(p\neg q)$
8. $\wedge p q$
9. $p \wedge q$
10. $(p \wedge q)$
11. $((p \wedge q))$
12. $((p \wedge q) \vee r)$
13. $((\neg p) \vee (q \leftrightarrow (\neg r)))$
14. $r \vee (\neg q \vee s)$
15. $((\neg r \vee \neg p) \vee s) \wedge (\neg q \vee s)$
16. $(\neg((\neg p) \to (\neg(\neg r))))$

Příklad 6: Pomocí tabulkové metody určete všechny modely následujících formulí a určete, které z těchto formulí jsou tautologie, které jsou splnitelné a které jsou kontradikce:

a) $p \vee q$

b) $p \vee \neg p$

c) $p \vee q \rightarrow q \vee p$

d) $p \rightarrow (p \vee q) \vee r$

e) $p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$

f) $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

g) $((p \rightarrow q) \leftrightarrow q) \rightarrow p$

h) $p \rightarrow (q \rightarrow (q \rightarrow p))$

i) $p \wedge \neg(q \rightarrow p)$

j) $p \wedge q \rightarrow p \vee r$

k) $(p \vee (\neg p \wedge q)) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

l) $p \wedge q \rightarrow (p \leftrightarrow q \vee r)$

m) $(p \wedge q \rightarrow (p \wedge \neg p \rightarrow q \vee \neg q)) \wedge (q \rightarrow q)$

n) $p \leftrightarrow q$

o) $p \leftrightarrow p \vee p$

p) $p \vee q \leftrightarrow q \vee p$

q) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (q \rightarrow p)$

r) $(p \leftrightarrow p) \leftrightarrow p$