

## Cvičení 4

**Příklad 1:** Uvažujme následující bezkontextovou gramatiku:

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow aBb \mid AB \\ A &\longrightarrow bAb \mid a \\ B &\longrightarrow \varepsilon \mid aABb \end{aligned}$$

- Uveďte (nějakou) derivaci slova `babaab` v této gramatice.
- Nakreslete příslušný derivační strom.
- Uveďte příslušnou levou a pravou derivaci odpovídající derivačnímu stromu nakreslenému v předchozím bodě.

*Řešení:*

Levá derivace:  $S \Rightarrow AB \Rightarrow bAbB \Rightarrow babB \Rightarrow babaABb \Rightarrow babaaBb \Rightarrow babaab$

Pravá derivace:  $S \Rightarrow AB \Rightarrow AaABb \Rightarrow AaAb \Rightarrow Aaab \Rightarrow bAbaab \Rightarrow babaab$

**Příklad 2:** Vytvořte bezkontextovou gramatiku pro každý z následujících jazyků:

- $L_1 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w \text{ obsahuje podslovo } babb\}$

*Řešení:*

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow AbabbA \\ A &\longrightarrow \varepsilon \mid aA \mid bA \mid cA \end{aligned}$$

- $L_2 = \{0^n 1^m \mid 1 \leq n < m\}$

*Řešení:*

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow AB \\ A &\longrightarrow 0A1 \mid 01 \\ B &\longrightarrow 1B \mid 1 \end{aligned}$$

- $L_3 = \{a^n b^m a^{n+2} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$

*Řešení:*

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow Aaa \\ A &\longrightarrow aAa \mid B \\ B &\longrightarrow bB \mid \varepsilon \end{aligned}$$

- $L_4 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w = w^R\}$

*Řešení:*

$$S \longrightarrow 0S0 \mid 1S1 \mid 0 \mid 1 \mid \varepsilon$$

- $L_5 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_0 > 1, |w|_1 \leq 2\}$

*Řešení:*

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow 00ABABA \mid 0AB0ABA \mid 0ABAB0A \mid AB00ABA \mid AB0AB0A \mid ABAB00A \\ A &\longrightarrow \varepsilon \mid 0A \\ B &\longrightarrow \varepsilon \mid 1 \end{aligned}$$

- $L_6 = \{0^n w w^R 1^n \mid w \in \{0, 1\}^*, n \in \mathbb{N}\}$

*Řešení:*

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow 0S1 \mid A \\ A &\longrightarrow 0A0 \mid 1A1 \mid \varepsilon \end{aligned}$$

- $L_7 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \text{ve } w \text{ je každé } a \text{ bezprostředně následováno } b \text{ nebo } w = b^n a^m, \text{ kde } 0 \leq m \leq n\}$

*Řešení:*

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow A \mid BC \\ A &\longrightarrow \varepsilon \mid abA \mid bA \\ B &\longrightarrow \varepsilon \mid bB \\ C &\longrightarrow bCa \mid \varepsilon \end{aligned}$$

- $L_8 = \{uv^Rv \mid u, v \in \{0, 1\}^*, |u|_0 \bmod 4 = 2, u \text{ končí sufixem } 101 \text{ a } v \text{ obsahuje podslovo } 10\}$

*Řešení:*

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow A101C \\ A &\longrightarrow B0B0B0B0BA \mid B0B \\ B &\longrightarrow \varepsilon \mid B1 \\ C &\longrightarrow 0C0 \mid 1C1 \mid 01D10 \\ D &\longrightarrow 0D0 \mid 1D1 \mid \varepsilon \end{aligned}$$

- $L_9 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = w^R, |w| \bmod 4 = 0\}$

*Řešení:*

$$S \longrightarrow aaSaa \mid abSba \mid baSab \mid bbSbb \mid \varepsilon$$

- $L_{10} = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = w^R, |w| \bmod 3 = 0\}$

*Řešení:*

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow aTa|bTb|\varepsilon \\ T &\longrightarrow aUa|bUb|a|b \\ U &\longrightarrow aSa|bSb \end{aligned}$$

- $L_{11} = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid \text{za každým úsekem znaků } a \text{ bezprostředně následuje dvakrát delší úsek znaků } b\}$

*Řešení:*

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow bS \mid cS \mid AB \mid \varepsilon \\ A &\longrightarrow aAbb \mid abb \\ B &\longrightarrow cS \mid AB \mid \varepsilon \end{aligned}$$

- $L_{12} = \{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_0 = |w|_1\}$

*Řešení:*

$$S \longrightarrow \varepsilon \mid 0S1 \mid 1S0 \mid SS$$

**Příklad 3:** Pro následující dvojice gramatik určete, zda obě gramatiky generují tentýž jazyk. Vaše odpovědi zdůvodněte.

a)  $S \longrightarrow aaSbb \mid ab \mid aabb$                        $S \longrightarrow aSb \mid ab$

*Řešení:* Druhá gramatika zřejmě generuje jazyk  $\{a^i b^i : i \geq 1\}$ . Zbývá tedy ověřit, zda první gramatika generuje tentýž jazyk. I první gramatika generuje jazyk, ve kterém jsou nejprve znaky  $a$  a až pak znaky  $b$ . Pravidlo  $S \longrightarrow aaSbb$  vygeneruje všechny větné formy tvaru  $a^j S b^j$ , kde  $j \geq 0$  je sudé. Takže pokud  $i$  z druhé gramatiky je liché, jsme hotovi užitím  $S \longrightarrow ab$ . Pokud máme generovat slovo  $a^i b^i$  pro sudé  $i \geq 2$ , nakonec aplikujeme pravidlo  $S \longrightarrow aabb$ , čímž vznikne slovo  $a^{j+2} b^{j+2}$ , kde  $i = j + 2$ . Takže jsme dokázali, že obě gramatiky generují tutéž množinu slov nad  $\{a, b\}$ .

b)  $S \longrightarrow aaSbb \mid ab \mid \varepsilon$                        $S \longrightarrow aSb \mid ab$

*Řešení:* Negenerují, neboť druhou gramatikou nelze vygenerovat slovo  $\varepsilon$ .

c)  $S \longrightarrow aaSb \mid ab \mid \varepsilon$                        $S \longrightarrow aSb \mid aab \mid \varepsilon$

*Řešení:* Negenerují, neboť druhou gramatikou nelze vygenerovat slovo  $aaaabb$ .

**Příklad 4:** Navrhněte bezkontextovou gramatiku pro jazyk  $L$  nad abecedou  $\Sigma = \{(, ), [, ]\}$  tvořený všemi „dobře uzávorkovanými“ výrazy. Dobře uzávorkovaným výrazem se myslí taková sekvence znaků, kde každé levé závorce odpovídá právě jedna příslušná pravá závorka stejného typu, a kde se závorky „nekříží“ (tj. odpovídající si páry závorek jsou do sebe správně zanořeny).

*Řešení:*

$$S \longrightarrow \varepsilon \mid SS \mid (S) \mid [S]$$

**Příklad 5:** Je následující gramatika jednoznačná?

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow E + E \mid F \\ F &\longrightarrow (E) \mid F \times F \mid a \end{aligned}$$

**Příklad 6:** Navrhněte syntaxi pro zápis jednoduchých aritmetických výrazů pomocí slov nad abecedou

$$\Sigma = \{A, B, \dots, Z, a, b, \dots, z, 0, 1, \dots, 9, ., +, -, *, /, (, )\}.$$

a popište vámi navrženou syntaxi bezkontextovou gramatikou.

**Příklad 7:** Napište bezkontextovou gramatiku generující množinu všech dobře vytvořených formulí výrokové logiky. Jako množinu atomických výroků uvažujte množinu  $At = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ , kde jednotlivé proměnné můžete zapisovat jako  $x_0, x_1, x_2, \dots$

- Zjistěte, zda je vámi vytvořená gramatika jednoznačná.
- Pokud gramatika jednoznačná není, upravte ji tak, aby jednoznačná byla.
- Upravte gramatiku tak, aby byla jednoznačná a aby struktura vytvořeného derivačního stromu pro libovolnou derivaci slova v této gramatice odpovídala skutečné prioritě logických spojek, tj.  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$  (od největší po nejmenší).

*Řešení:*

$$\begin{aligned}
 S &\longrightarrow A \mid A \leftrightarrow S \\
 A &\longrightarrow B \mid B \rightarrow A \\
 B &\longrightarrow C \mid C \vee B \\
 C &\longrightarrow D \mid D \wedge C \\
 D &\longrightarrow \neg D \mid (S) \mid xE \mid \perp \mid \top \\
 E &\longrightarrow F \mid EF \\
 F &\longrightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9
 \end{aligned}$$

Tato gramatika je jednoznačná a struktura derivačního stromu odpovídá prioritě logických spojek.