

## Cvičení 5

**Příklad 1:** Uvažujme následující zásobníkový automat  $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, C)$ , kde  $Q = \{q_1, q_2\}$ ,  $\Sigma = \{a, b, c\}$ ,  $\Gamma = \{A, B, C\}$  a kde přechodová funkce  $\delta$  je zadána následující sadou pravidel:

$$\begin{array}{llll} q_1C \xrightarrow{a} q_1A & q_1A \xrightarrow{a} q_1AA & q_1B \xrightarrow{a} q_1AB & q_2A \xrightarrow{a} q_2 \\ q_1C \xrightarrow{b} q_1B & q_1A \xrightarrow{b} q_1BA & q_1B \xrightarrow{b} q_1BB & q_2B \xrightarrow{b} q_2 \\ q_1C \xrightarrow{c} q_2 & q_1A \xrightarrow{c} q_2A & q_1B \xrightarrow{c} q_2B & \end{array}$$

Automat  $\mathcal{M}$  přijímá prázdným zásobníkem.

Vypište posloupnost všech konfigurací, kterými automat  $\mathcal{M}$  projde při výpočtu nad slovem  $abaacaaba$ .

*Řešení:*

$$\begin{array}{ll} (q_1, abaacaaba, C) & q_1C \xrightarrow{a} q_1A \\ \longrightarrow (q_1, baacaaba, A) & \xrightarrow{b} q_1BA \\ \longrightarrow (q_1, aacaaba, BA) & \xrightarrow{a} q_1ABA \\ \longrightarrow (q_1, acaaba, ABA) & \xrightarrow{a} q_1AABA \\ \longrightarrow (q_1, caaba, AABA) & \xrightarrow{c} q_2AABA \\ \longrightarrow (q_2, aaba, AABA) & \xrightarrow{a} q_2ABA \\ \longrightarrow (q_2, aba, ABA) & \xrightarrow{a} q_2BA \\ \longrightarrow (q_2, ba, BA) & \xrightarrow{b} q_2A \\ \longrightarrow (q_2, a, A) & \xrightarrow{a} q_2 \\ \longrightarrow (q_2, \varepsilon, \varepsilon) & \end{array} \quad \text{nebo}$$

**Příklad 2:** Pro každý z následujících jazyků navrhnete zásobníkový automat, který daný jazyk přijímá.

Vytvořené automaty mohou být nedeterministické. U těch jazyků, kde je to možné, se pokuste sestavit daný zásobníkový automat tak, aby byl deterministický.

*Poznámka:* Může být vhodné začít tím, že nejprve neformálně popíšete činnost vámi navrhovaného automatu pro daný jazyk. Tento popis by měl být dostatečně detailní na to, aby z něj bylo jasné, jak bude daný automat fungovat. Poté alespoň pro některé z následujících jazyků dotáhněte tuto konstrukci do podoby, kde uvedete formální popis daného automatu, tj. všechny jeho stavy, přechody, atd.

a)  $\{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$

b)  $\{a^n b^m \mid n > m\}$

c)  $\{a^n b^i c b c^j \mid n = i + j\}$

*Poznámka:* Abeceda je  $\{a, b, c\}$ .

d)  $\{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a > |w|_b\}$

e) Doplněk jazyka  $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ .

*Řešení:* Zasobníkový automat  $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, X)$  přijímající prázdným zásobníkem, kde  $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ ,  $\Sigma = \{a, b\}$ ,  $\Gamma = \{X, A\}$  a kde přechodová funkce  $\delta$  je daná následující sadou pravidel:

$$\begin{array}{lll}
 q_0X \xrightarrow{a} q_0AX & q_0X \xrightarrow{b} q_2X & \\
 q_0A \xrightarrow{a} q_0AA & q_0A \xrightarrow{b} q_1 & q_0A \xrightarrow{\varepsilon} q_3A \\
 q_1X \xrightarrow{a} q_2X & q_1X \xrightarrow{b} q_2X & \\
 q_1A \xrightarrow{a} q_2A & q_1A \xrightarrow{b} q_1 & q_1A \xrightarrow{\varepsilon} q_3A \\
 q_2X \xrightarrow{a} q_2X & q_2X \xrightarrow{b} q_2X & q_2X \xrightarrow{\varepsilon} q_3X \\
 q_2A \xrightarrow{a} q_2A & q_2A \xrightarrow{b} q_2A & q_2A \xrightarrow{\varepsilon} q_3A \\
 q_3A \xrightarrow{\varepsilon} q_3 & q_3X \xrightarrow{\varepsilon} q_3 & 
 \end{array}$$

*Poznámka:* Tentýž automat bude fungovat i při přijímání přijímajícím stavem, pokud se zvolí  $F = \{q_3\}$ .

- f)  $\{wcx \mid w, x \in \{a, b\}^* \text{ a } w^R \text{ je podslovem slova } x\}$

*Poznámka:* Abeceda je  $\{a, b, c\}$ .

- g)  $\{w_1cw_2c \cdots cw_k \mid k \geq 1, \text{ pro každé } w_i \text{ platí } w_i \in \{a, b\}^* \text{ a existují nějaká } i \text{ a } j \text{ taková, že } w_i = w_j^R\}$

*Poznámka:* Abeceda je  $\{a, b, c\}$ . Všimněte si také, že pro daná  $i$  a  $j$  může platit  $i = j$ .

*Řešení:* Zasobníkový automat  $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, X)$  přijímající prázdným zásobníkem, kde  $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}$ ,  $\Sigma = \{a, b, c\}$ ,  $\Gamma = \{X, A, B\}$  a kde přechodová funkce  $\delta$  je daná následující sadou pravidel:

$$\begin{array}{llll}
 q_0X \xrightarrow{a} q_1X & q_0X \xrightarrow{b} q_1X & q_0X \xrightarrow{c} q_0X & q_0X \xrightarrow{\varepsilon} q_2X \\
 q_1X \xrightarrow{a} q_1X & q_1X \xrightarrow{b} q_1X & q_1X \xrightarrow{c} q_0X & \\
 q_2X \xrightarrow{a} q_2AZ & q_2X \xrightarrow{b} q_2BZ & q_2X \xrightarrow{c} q_3X & \\
 q_2X \xrightarrow{a} q_5X & q_2X \xrightarrow{b} q_5X & & q_2X \xrightarrow{\varepsilon} q_5X \\
 q_2A \xrightarrow{a} q_2AA & q_2A \xrightarrow{b} q_2BA & q_2A \xrightarrow{c} q_3A & \\
 q_2A \xrightarrow{a} q_5A & q_2A \xrightarrow{b} q_5A & & q_2A \xrightarrow{\varepsilon} q_5A \\
 q_2B \xrightarrow{a} q_2AB & q_2B \xrightarrow{b} q_2BB & q_2B \xrightarrow{c} q_3B & \\
 q_2B \xrightarrow{a} q_5B & q_2B \xrightarrow{b} q_5B & & q_2B \xrightarrow{\varepsilon} q_5B \\
 q_3X \xrightarrow{a} q_4X & q_3X \xrightarrow{b} q_4X & q_3X \xrightarrow{c} q_3X & q_3X \xrightarrow{\varepsilon} q_5X \\
 q_3A \xrightarrow{a} q_4A & q_3A \xrightarrow{b} q_4A & q_3A \xrightarrow{c} q_3A & q_3A \xrightarrow{\varepsilon} q_5A \\
 q_3B \xrightarrow{a} q_4B & q_3B \xrightarrow{b} q_4B & q_3B \xrightarrow{c} q_3B & q_3B \xrightarrow{\varepsilon} q_5B \\
 q_4X \xrightarrow{a} q_4X & q_4X \xrightarrow{b} q_4X & q_4X \xrightarrow{c} q_3X & \\
 q_4A \xrightarrow{a} q_4A & q_4A \xrightarrow{b} q_4A & q_4A \xrightarrow{c} q_3A & \\
 q_4B \xrightarrow{a} q_4B & q_4B \xrightarrow{b} q_4B & q_4B \xrightarrow{c} q_3B & \\
 q_5A \xrightarrow{a} q_5 & q_5B \xrightarrow{b} q_5 & q_5X \xrightarrow{c} q_6X & q_5X \xrightarrow{\varepsilon} q_6 \\
 q_6X \xrightarrow{a} q_6X & q_6X \xrightarrow{b} q_6X & q_6X \xrightarrow{c} q_6X & q_6X \xrightarrow{\varepsilon} q_6
 \end{array}$$

*Poznámka:* Tentýž automat bude fungovat i při přijímání přijímajícím stavem, pokud se zvolí  $F = \{q_6\}$ .

**Příklad 3:** Pro následující bezkontextovou gramatiku  $\mathcal{G}$  sestrojte zásobníkový automat  $\mathcal{M}$  přijímající jazyk generovaný touto gramatikou (tj. takový, že  $\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \mathcal{L}(\mathcal{G})$ ):

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow \varepsilon \mid AS \\ A &\longrightarrow aAb \mid B \\ B &\longrightarrow \varepsilon \mid bB \end{aligned}$$

Uveďte nějakou derivaci slova  $aabbabbb$  v gramatice  $\mathcal{G}$  a nějaký přijímající výpočet automatu  $\mathcal{M}$  nad tímto slovem.

Je mezi touto derivací v gramatice  $\mathcal{G}$  a výpočtem automatu  $\mathcal{M}$  nějaký vztah?

*Řešení:* Zásobníkový automat  $\mathcal{M} = (q_0, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, S)$ , kde  $\Sigma = \{a, b\}$ ,  $\Gamma = \{S, A, B, a, b\}$  a kde přechodová funkce  $\delta$  je dána následující sadou pravidel:

$$\begin{aligned} q_0 S &\xrightarrow{\varepsilon} q_0 & q_0 a &\xrightarrow{a} q_0 \\ q_0 S &\xrightarrow{\varepsilon} q_0 AS & q_0 b &\xrightarrow{b} q_0 \\ q_0 A &\xrightarrow{\varepsilon} q_0 aAb \\ q_0 A &\xrightarrow{\varepsilon} q_0 B \\ q_0 B &\xrightarrow{\varepsilon} q_0 \\ q_0 B &\xrightarrow{\varepsilon} q_0 bB \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow AS \\ &\Rightarrow aAbS \\ &\Rightarrow aaAbbs \\ &\Rightarrow aaBbsS \\ &\Rightarrow aabbS \\ &\Rightarrow aabbAS \\ &\Rightarrow aabbaAbS \\ &\Rightarrow aabbaBbS \\ &\Rightarrow aabbabBbS \\ &\Rightarrow aabbabbBbS \\ &\Rightarrow aabbabbbS \\ &\Rightarrow aabbabbb \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_0 S &\xrightarrow{\varepsilon} q_0 AS \\ &\xrightarrow{\varepsilon} q_0 aAbS \\ &\xrightarrow{a} q_0 AbS \\ &\xrightarrow{\varepsilon} q_0 aAbbsS \\ &\xrightarrow{a} q_0 AbbsS \\ &\xrightarrow{\varepsilon} q_0 BbsS \\ &\xrightarrow{\varepsilon} q_0 bbsS \\ &\xrightarrow{b} q_0 bS \\ &\xrightarrow{b} q_0 S \\ &\xrightarrow{\varepsilon} q_0 AS \\ &\xrightarrow{\varepsilon} q_0 aAbS \\ &\xrightarrow{a} q_0 AbS \\ &\xrightarrow{\varepsilon} q_0 BbS \\ &\xrightarrow{\varepsilon} q_0 bBbS \\ &\xrightarrow{b} q_0 BbS \\ &\xrightarrow{\varepsilon} q_0 bBbS \\ &\xrightarrow{b} q_0 BbS \\ &\xrightarrow{\varepsilon} q_0 bS \\ &\xrightarrow{b} q_0 S \\ &\xrightarrow{\varepsilon} q_0 \end{aligned}$$

**Příklad 4:** Uvažujme následující konstrukci: K danému zásobníkovému automatu  $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ , který přijímá pomocí přijímajících stavů, sestrojíme zásobníkový automat  $\mathcal{M}' = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta', q_0, Z_0)$  přijímající prázdným zásobníkem, kde přechodová funkce  $\delta'$  obsahuje ty samé přechody, co funkce  $\delta$ , ke kterým navíc přidáme přechody typu

$$qX \xrightarrow{\varepsilon} q$$

pro každé  $q \in F$  a každé  $X \in \Gamma$ .

- a) Ukažte, že výše uvedená konstrukce obecně nevede k sestrojení ekvivalentního automatu, tj. uveďte konkrétní příklad zásobníkového automatu  $\mathcal{M}$  takového, že při použití výše uvedené konstrukce dostaneme automat  $\mathcal{M}'$ , kde  $\mathcal{L}(\mathcal{M}) \neq \mathcal{L}(\mathcal{M}')$ .

*Řešení:* Například zásobníkový automat  $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, X, F)$ , přijímající pomocí přijímajících stavů, kde  $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ ,  $\Sigma = \{a, b, c\}$ ,  $\Gamma = \{X, A, B\}$ ,  $F = \{q_2\}$ , a přechodová funkce  $\delta$  je dána následující sadou pravidel:

$$\begin{array}{llll} q_0X \xrightarrow{a} q_1AX & q_1A \xrightarrow{a} q_1AB & q_1B \xrightarrow{b} q_1 & q_2B \xrightarrow{b} q_2B \\ & q_1A \xrightarrow{b} q_1 & q_1X \xrightarrow{\varepsilon} q_2 & q_2X \xrightarrow{b} q_2X \\ & q_1A \xrightarrow{c} q_2A & & \end{array}$$

Tento automat přijímá jazyk

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\} \cup \{a^n c \mid n \geq 1\}.$$

Po provedení výše uvedené konstrukce bude automat  $\mathcal{M}'$  přijímat kromě všech slov z jazyka  $L$  navíc také všechna slova tvaru  $a^n c b^m$ , kde  $n \geq 1$  a  $m \geq 1$ .

- b) Navrhněte, jak tuto konstrukci upravit tak, aby výsledkem byl vždy ekvivalentní automat, tj. aby pro libovolný zásobníkový automat  $\mathcal{M}$  přijímající přijímajícím stavem aplikováním dané konstrukce vždy vznikl zásobníkový automat  $\mathcal{M}'$  přijímající prázdným zásobníkem takový, že  $\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \mathcal{L}(\mathcal{M}')$ .

*Řešení:* K danému zásobníkovému automatu  $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, X_0, F)$ , který přijímá pomocí přijímajících stavů, sestrojíme zásobníkový automat  $\mathcal{M}' = (Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q'_0, X'_0)$ , přijímající prázdným zásobníkem, kde:

- $Q' = Q \cup \{q'_0, q_f\}$ , kde  $q'_0$  a  $q_f$  jsou nové stavy nevyskytující se v  $Q$ ,
- $\Gamma' = \Gamma \cup \{X'_0\}$ , kde  $X'_0$  je nový zásobníkový symbol nevyskytující se v  $\Gamma$ ,
- $\delta'$  obsahuje všechna pravidla z  $\delta$  a navíc pravidla
  - $q'_0 X'_0 \xrightarrow{\varepsilon} q_0 X_0 X'_0$ ,
  - $qX \xrightarrow{\varepsilon} q_f$  pro každé  $q \in F$  a  $X \in \Gamma'$ ,
  - $q_f X \xrightarrow{\varepsilon} q_f$  pro každé  $X \in \Gamma'$ .

**Příklad 5:** Pro každý z následujících jazyků určete, jestli je daný jazyk (i) regulární, (ii) bezkontextový. Vaše odpovědi alespoň neformálně zdůvodněte.

- a)  $\{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ nekončí sufixem } baa \text{ a } |w|_a \bmod 3 = 2\}$

*Řešení:* Je regulární, je bezkontextový.

- b)  $\{a^j \mid j \text{ je mocninou čísla } 2\}$

*Řešení:* Není regulární, není bezkontextový.

- c)  $\{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ je mocninou čísla } 2 \text{ zapsanou binárně}\}$

*Řešení:* Je regulární, je bezkontextový.

- d) jazyk popsáný regulárním výrazem  $a^*b^*c^*$

*Řešení:* Je regulární, je bezkontextový.

- e)  $\{w \in \{a, +\}^* \mid w \text{ je generováno gramatikou } S \longrightarrow S+S \mid a\}$

*Řešení:* Je regulární, je bezkontextový.

- f)  $\{w \in \{a, +, (, )\}^* \mid w \text{ je generováno gramatikou } S \longrightarrow S+S \mid (S) \mid a\}$

*Řešení:* Není regulární, je bezkontextový.

- g)  $\{a^m b^n \mid (m \bmod 3) > (n \bmod 3)\}$

*Řešení:* Je regulární, je bezkontextový.

- h)  $\{a^m b^n \mid n \neq m\}$

*Řešení:* Není regulární, je bezkontextový.

- i)  $\{a^m b^n \mid m, n \geq 0, 5m + 3n = 24\}$

*Řešení:* Je regulární, je bezkontextový.

- j)  $\{a^m b^n \mid m, n \geq 0, 5m - 3n = 24\}$

*Řešení:* Není regulární, je bezkontextový.

- k)  $\{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w|_a = |w|_b = |w|_c\}$

*Řešení:* Není regulární, není bezkontextový.

- l)  $\{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w|_a > |w|_b \text{ a } |w|_b > |w|_c\}$

*Řešení:* Není regulární, není bezkontextový.

- m)  $\{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w|_a > |w|_b \text{ nebo } |w|_b > |w|_c\}$

*Řešení:* Není regulární, je bezkontextový.

- n)  $\{a^n b^m c^k d^\ell \mid 2n = 3k \text{ nebo } 5m = 7\ell\}$

*Řešení:* Není regulární, je bezkontextový.

o)  $\{a^n b^m c^k d^\ell \mid 2n = 3k \text{ a } 5m = 7\ell\}$

*Řešení:* Není regulární, není bezkontextový.

p)  $\{a^n b^m c^k d^\ell \mid 2n = 3m \text{ a } 5k = 7\ell\}$

*Řešení:* Není regulární, je bezkontextový.

q)  $\{a^n b^m c^k d^\ell \mid 2n = 3\ell \text{ a } 5k = 7m\}$

*Řešení:* Není regulární, je bezkontextový.

r)  $\{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$

*Řešení:* Není regulární, není bezkontextový.

s)  $\{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$

*Řešení:* Není regulární, je bezkontextový.

t)  $\{ww \mid w \in \{a\}^*\}$

*Řešení:* Je regulární, je bezkontextový.