Cvičení 5

Příklad 1: Uvažujme následující zásobníkový automat $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, C)$, kde $Q = \{q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \{A, B, C\}$ a kde přechodová funkce δ je zadaná následující sadou pravidel:

$$
\begin{array}{llll}
q_1C \xrightarrow{a} q_1A & q_1A \xrightarrow{a} q_1AA & q_1B \xrightarrow{a} q_1AB & q_2A \xrightarrow{a} q_2 \\
q_1C \xrightarrow{b} q_1B & q_1A \xrightarrow{b} q_1BA & q_1B \xrightarrow{b} q_1BB & q_2B \xrightarrow{b} q_2 \\
q_1C \xrightarrow{c} q_2 & q_1A \xrightarrow{c} q_2A & q_1B \xrightarrow{c} q_2B &
\end{array}
$$

Automat $\mathcal{M}$ přijímá prázdným zásobníkem.

Vypište posloupnost všech konfigurací, kterými automat $\mathcal{M}$ projde při výpočtu nad slovem $abaacaaba$.

Příklad 2: Pro každý z následujících jazyků navrhněte zásobníkový automat, který daný jazyk přijímá.

Vytvořené automaty mohou být nedeterministické. U těch jazyků, kde je to možné, se pokuste sestrojit daný zásobníkový automat tak, aby byl deterministický.

Poznámka: Může být vhodné začít tím, že nejprve neformálně popíšete činnost vámi navrhovaného automatu pro daný jazyk. Tento popis by měl být dostatečně detailní na to, aby z něj bylo jasné, jak bude daný automat fungovat. Poté alespoň pro některé z následujících jazyků dotáhněte tuto konstrukci do podoby, kde uvedete formální popis daného automatu, tj. všechny jeho stavy, přechody, atd.

a) $\{ ww^R \mid w \in \{a, b\}^* \}$

b) $\{ a^n b^m \mid n > m \}$

c) $\{ a^n b^i c b c^j \mid n = i + j \}$

Poznámka: Abeceda je $\{a, b, c\}$.

d) $\{ w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a > |w|_b \}$

e) Doplněk jazyka $\{ a^n b^n \mid n \geq 0 \}$.

f) $\{ wcx \mid w, x \in \{a, b\}^*$ a w^R je podslovem slova $x \}$

Poznámka: Abeceda je $\{a, b, c\}$.

g) $\{ w_1 c w_2 c \cdots c w_k \mid k \geq 1$, pro každé w_i platí $w_i \in \{a, b\}^*$ a existují nějaká i a j taková, že $w_i = w_j^R \}$

Poznámka: Abeceda je $\{a, b, c\}$. Všimněte si také, že pro daná i a j může platit $i = j$.

Příklad 3: Pro následující bezkontextovou gramatiku $\mathcal{G}$ sestrojte zásobníkový automat $\mathcal{M}$ přijímající jazyk generovaný touto gramatikou (tj. takový, že $\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \mathcal{L}(\mathcal{G})$):

$$\begin{array}{rcl} S & \longrightarrow & \varepsilon \mid AS \\ A & \longrightarrow & aAb \mid B \\ B & \longrightarrow & \varepsilon \mid bB \end{array}$$

Uveďte nějakou derivaci slova $aabbabbb$ v gramatice $\mathcal{G}$ a nějaký přijímajímající výpočet automatu $\mathcal{M}$ nad tímto slovem.

Je mezi touto derivací v gramatice $\mathcal{G}$ a výpočtem automatu $\mathcal{M}$ nějaký vztah?

Příklad 4: Uvažujme následující konstrukci: K danému zásobníkovému automatu $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, který přijímá pomocí přijímajících stavů, sestrojíme zásobníkový automat $\mathcal{M}' = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta', q_0, Z_0)$ přijímající prázdným zásobníkem, kde přechodová funkce δ' obsahuje ty samé přechody, co funkce δ, ke kterým navíc přidáme přechody typu

$$qX \xrightarrow{\varepsilon} q$$

pro každé $q \in F$ a každé $X \in \Gamma$.

a) Ukažte, že výše uvedená konstrukce obecně nevede k sestrojení ekvivalentního automatu, tj. uveďte konkrétní příklad zásobníkového automatu $\mathcal{M}$ takového, že při použití výše uvedené konstrukce dostaneme automat $\mathcal{M}'$, kde $\mathcal{L}(\mathcal{M}) \neq \mathcal{L}(\mathcal{M}')$.

b) Navrhněte, jak tuto konstrukci upravit tak, aby výsledkem byl vždy ekvivalentní automat, tj. aby pro libovolný zásobníkový automat $\mathcal{M}$ přijímající přijímajícím stavem aplikováním dané konstrukce vždy vznikl zásobníkový automat $\mathcal{M}'$ přijímající prázdným zásobníkem takový, že $\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \mathcal{L}(\mathcal{M}')$.

Příklad 5: Pro každý z následujících jazyků určete, jestli je daný jazyk (i) regulární, (ii) bezkontextový. Vaše odpovědi alespoň neformálně zdůvodněte.

a) $\{\, w \in \{a, b\}^* \mid w$ nekončí sufixem baa a $|w|_a \bmod 3 = 2 \,\}$

b) $\{\, a^j \mid j$ je mocninou čísla $2 \,\}$

c) $\{\, w \in \{0, 1\}^* \mid w$ je mocninou čísla 2 zapsanou binárně$\,\}$

d) jazyk popsaný regulárním výrazem $a^*b^*c^*$

e) $\{\, w \in \{a, +\}^* \mid w$ je generováno gramatikou $S \longrightarrow S{+}S \mid a \,\}$

f) $\{\, w \in \{a, +, (,)\}^* \mid w$ je generováno gramatikou $S \longrightarrow S{+}S \mid (S) \mid a \,\}$

g) $\{\, a^m b^n \mid (m \bmod 3) > (n \bmod 3) \,\}$

h) $\{\, a^m b^n \mid n \neq m \,\}$

i) $\{\, a^m b^n \mid m, n \geq 0,\ 5m + 3n = 24 \,\}$

j) $\{\, a^m b^n \mid m, n \geq 0,\ 5m - 3n = 24 \,\}$

k) $\{\, w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}^* \mid |w|_\mathtt{a} = |w|_\mathtt{b} = |w|_\mathtt{c} \,\}$

l) $\{\, w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}^* \mid |w|_\mathtt{a} > |w|_\mathtt{b}$ a $|w|_\mathtt{b} > |w|_\mathtt{c} \,\}$

m) $\{\, w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}^* \mid |w|_\mathtt{a} > |w|_\mathtt{b}$ nebo $|w|_\mathtt{b} > |w|_\mathtt{c} \,\}$

n) $\{\, \mathtt{a}^n \mathtt{b}^m \mathtt{c}^k \mathtt{d}^\ell \mid 2n = 3k$ nebo $5m = 7\ell \,\}$

o) $\{\, \mathtt{a}^n \mathtt{b}^m \mathtt{c}^k \mathtt{d}^\ell \mid 2n = 3k$ a $5m = 7\ell \,\}$

p) $\{\, \mathtt{a}^n \mathtt{b}^m \mathtt{c}^k \mathtt{d}^\ell \mid 2n = 3m$ a $5k = 7\ell \,\}$

q) $\{\, \mathtt{a}^n \mathtt{b}^m \mathtt{c}^k \mathtt{d}^\ell \mid 2n = 3\ell$ a $5k = 7m \,\}$

r) $\{\, ww \mid w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \,\}$

s) $\{\, ww^R \mid w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \,\}$

t) $\{\, ww \mid w \in \{\mathtt{a}\}^* \,\}$