Příjmení a jméno: Datum:
Login studenta:

Zkoušková písemka z předmětu „Úvod do teoretické informatiky“ (ukázková písemka)

Doba trvání: **90 minut** Max. zisk: **78 bodů**

Část 1: Logika

Příklad [1] (5 bodů): Následující tvrzení reprezentujte co nejpřesněji pomocí formule predikátové logiky. Uveďte přehled všech predikátových, funkčních a konstantních symbolů, které ve formuli používáte, spolu s (neformálním) popisem toho, co každý jednotlivý symbol reprezentuje. U predikátových a funkčních symbolů uveďte jejich aritu.

Existují taková dvě přirozená čísla, která nejsou sudá, a jejichž součet je sudý.

Příklad [2] (7 bodů): Předpokládejme, že P je unární predikátový symbol, Q a R jsou binární predikátové symboly, f je unární funkční symbol, g je binární funkční symbol a c je konstantní symbol.

Vezměme si interpretaci $\mathcal{A}$, kde universem je množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$, kde predikátovým symbolům P, Q a R jsou přiřazeny níže uvedené relace $P^{\mathcal{A}}$, $Q^{\mathcal{A}}$ a $R^{\mathcal{A}}$, funkčním symbolům f a g níže uvedené funkce $f^{\mathcal{A}}$ a $g^{\mathcal{A}}$ a konstatnímu symbolu c níže uvedený prvek $c^{\mathcal{A}}$.

Dále si vezměme níže uvedenou valuaci ν, která přiřazuje hodnoty proměnným x, y, z.

Pro každou z posloupností symbolů v nejlevějším sloupci tabulky uveďte do příslušného řádku odpovědi na následující otázky (přičemž berte v úvahu výše uvedené arity funkčních a predikátových symbolů a používejte běžné konvence o vypouštění závorek):

(a) Jedná se o dobře utvořený term? (`A`/`N`)
(b) Jedná se o dobře utvořenou formuli predikátové logiky? (`A`/`N`)
(c) Jakou má tento term nebo formule hodnotu v interpretaci $\mathcal{A}$ při valuaci ν? (Na tuto otázku odpovídejte jen tehdy, pokud jste ve sloupci (a) nebo (b) odpověděli “`A`”. U formule uveďte její pravivostní hodnotu, u termu prvek universa.)

Universum: $\mathbb{Q}$

$P^{\mathcal{A}} = \{x \in \mathbb{Q} \mid |x| = 1\}$
$Q^{\mathcal{A}} = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid x = y\}$
$R^{\mathcal{A}} = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid x < y\}$
$f^{\mathcal{A}}(x) = 2x + 1$
$g^{\mathcal{A}}(x, y) = x \cdot y$
$c^{\mathcal{A}} = 1$

$\nu(x) = -2$, $\nu(y) = 3/5$, $\nu(z) = 0$

	(a)	(b)	(c)
$R(z, g(y, y)) \to \neg P(c)$			
$f(f(g(g(c, z), g(x, y))))$			
$\forall x \forall x(R(x, x))$			
$\forall y(\exists x(f(P(x))) \wedge g(y, y))$			
$\exists x(Q(g(f(c), x), c))$			

Příklad [3] (7 bodů): Pomocí rezoluční metody zjistěte, zda závěr uvedený pod čarou logicky vyplývá z daných předpokladů (uvedených nad čarou).

$$\begin{array}{l} (s \to t) \wedge (\neg u \to \neg t) \\ (\neg s \to p) \wedge \neg p \\ \hline \neg(u \to s) \end{array}$$

Příklad [4] (7 bodů): Následující tabulka obsahuje šest formulí výrokové logiky očíslovaných čísly 1. až 6. Pro každou z těchto formulí zapište do příslušného řádku následující:

- Do třetího a čtvrtého sloupce napište odpověď na příslušnou otázku (místo „ano“ a „ne“ stačí psát “`A`” a “`N`”).
- Do pátého sloupce napište čísla všech ostatních formulí z tabulky, které jsou s danou formulí logicky ekvivalentní (pokud s ní žádná další formule ekvivalentní není, příslušnou buňku tabulky proškrtněte).

		Je v KNF?	Je v DNF?	Čísla ekv. formulí
1.	$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$			
2.	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$			
3.	$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$			
4.	$(\neg p \to q) \wedge (p \to \neg q)$			
5.	$(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$			
6.	$p \leftrightarrow q$			

Část 2: Jazyky a automaty

Příklad [5] (10 bodů): Ke každé z následujících bezkontextových gramatik a každému z následujících regulárních výrazů přiřaďte jazyky (z níže uvedeného seznamu jazyků), které jsou generovány danou bezkontextovou gramatikou nebo popsány daným regulárním výrazem. Řešení pište do připravené tabulky, kde ke každé gramatice a každému výrazu napište písmena všech odpovídajících jazyků, popřípadě buňku tabulky proškrtněte, pokud gramatice nebo výrazu neodpovídá žádný jazyk.

(1) $b^* a^* ab$

(2) $(b^* a^* b^*)^* ab$

(3) $(a+b)^* ab (a+b)^*$

(4)
$$\begin{aligned} S &\longrightarrow Aab \\ A &\longrightarrow bAa \mid \varepsilon \end{aligned}$$

(5)
$$\begin{aligned} S &\longrightarrow bS \mid A \\ A &\longrightarrow aA \mid ab \end{aligned}$$

(6)
$$\begin{aligned} S &\longrightarrow AaAbA \mid B \\ A &\longrightarrow aA \mid bA \mid \varepsilon \\ B &\longrightarrow AbAaA \end{aligned}$$

(A) $\{b^i a^i ab \mid i \geq 0\}$

(B) $\{w \in \{a,b\}^* \mid w$ končí sufixem $ab\}$

(C) $\{b^i a^j ab \mid i,j \geq 0\}$

(D) $\{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a > 0, |w|_b > 0\}$

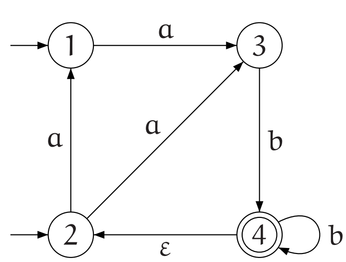
Řešení:

Gramatika / Reg. výraz	Jazyky
(1)	
(2)	
(3)	
(4)	
(5)	
(6)	

Příklad [6] (9 bodů): Zkonstruujte regulární výraz popisující následující jazyk L.

$$L = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w|_1 \geq 3 \text{ nebo } w \text{ obsahuje podslova } 101 \text{ a } 000\}$$

Příklad [7] (7 bodů): Vypište všechna slova délky právě 5, která přijímá následující nedeterministický konečný automat.



Část 3: Vyčíslitelnost a složitost

Příklad [8] (8 bodů): Pro následující algoritmus určete co nejpřesněji jeho časovou složitost v nejhorším případě a vyjádřete ji pomocí asymptotické notace (nejlépe jako jeden odhad vyjářený pomocí Θ, případně jako dva odhady vyjádřené pomocí O a Ω). Jako velikost vstupu uvažujte hodnotu uloženou v proměnné n.

Odvozené výsledky **zdůvodněte**.

Poznámka: Předpokládejte, že A a B jsou vektory velikosti n, přičemž prvky těchto vektorů jsou indexovány od jedné, a že C je matice velikosti $(n+1) \times (n+1)$, jejíž řádky i sloupce jsou indexovány od nuly.

```
COMPUTE (A, B, n):
begin
    for i := 0 to n do
        c[i][0] := 0
        c[0][i] := 0
    end
    for i := 1 to n do
        for j := 1 to n do
            if A[i] = B[j] then
                C[i][j] := C[i − 1][j − 1] + 1
            else if C[i − 1][j] ≥ C[i][j − 1] then
                C[i][j] := C[i − 1][j] + 1
            else
                C[i][j] := C[i][j − 1] + 1
            end
        end
    end
    return C[n][n]
end
```

Příklad [9] (3 body): V následující tabulce vyznačte, které ze vztahů typu $f \in O(g)$, $f \in \Omega(g)$ a $f \in \Theta(g)$ platí, a které ne.

Vztahy, které platí, **zakroužkujte**, a vztahy, které neplatí, **přeškrtněte**.

$f_1(n) = 18n^3$ $\qquad$ $f_2(n) = 2^n$ $\qquad$ $f_3(n) = 3n^3 \log_2 n$

$f_1 \in O(f_2)$	$f_2 \in O(f_1)$	$f_1 \in O(f_3)$	$f_3 \in O(f_1)$	$f_2 \in O(f_3)$	$f_3 \in O(f_2)$
$f_1 \in \Omega(f_2)$	$f_2 \in \Omega(f_1)$	$f_1 \in \Omega(f_3)$	$f_3 \in \Omega(f_1)$	$f_2 \in \Omega(f_3)$	$f_3 \in \Omega(f_2)$
$f_1 \in \Theta(f_2)$	$f_2 \in \Theta(f_1)$	$f_1 \in \Theta(f_3)$	$f_3 \in \Theta(f_1)$	$f_2 \in \Theta(f_3)$	$f_3 \in \Theta(f_2)$

Příklad [10] (7 bodů): Pro následující algoritmus proveďte následující:

- Nakreslete graf jeho řídícího toku.
- Uvažujme výpočet, kde algoritmus dostane jako vstup číslo 4. Uveďte, jaký bude obsah paměti po prvních 10 krocích výpočtu, a dále pak, kolik kroků při tomto výpočtu algoritmus provede a jaký bude jeho výstup. (Jeden krok odpovídá jedné hraně v grafu řídícího toku.)

```
Comp (n):
begin
    a := 0
    b := 1
    for i := 1 to n − 1 do
        c := a + b
        a := b
        b := c
    end
    return b
end
```

- Obsah paměti po 10 krocích:
- Celkový počet kroků:
- Výstup:

Příklad [11] (8 bodů): Navrhněte a podrobně popište (nejlépe pomocí pseudokódu) algoritmus řešící následující problém. V případech, kdy není očividné, že vámi navržený algoritmus skutečně řeší daný problém, uveďte nějaké alespoň neformální zdůvodnění korektnosti tohoto algoritmu.

VSTUP: Přirozené číslo n.

VÝSTUP: Počet jedniček v binárním zápise čísla n.

Například pro vstup 43 bude výstupem číslo 4, protože binárně se číslo 43 zapíše jako 101011 a tato posloupnost obsahuje čtyři jedničky.