Úvod do teoretické informatiky

Zdeněk Sawa

Katedra informatiky, FEI,
Vysoká škola báňská – Technická universita Ostrava
17. listopadu 15, Ostrava-Poruba 708 33
Česká republika

13. února 2019

Přednášející

Jméno: doc. Ing. Zdeněk Sawa, Ph.D.

E-mail: zdenek.sawa@vsb.cz

Místnost: EA413

Web: http://www.cs.vsb.cz/sawa/uti

Na těchto stránkách najdete:

- Informace o předmětu
- Učební texty
- Slidy z přednášek
- Zadání příkladů na cvičení
- Aktuální informace
- Odkaz na stránku s animacemi

Požadavky

- **Zápočet** (22 bodů):
  - Zápočtová písemka (16 bodů) — bude se psát na cvičení
    - Minimum pro získání zápočtu je 9 bodů.
    - Možnost opravy za 14 bodů.
  - Aktivita na cvičení (6 bodů)
    - Minimum pro získání zápočtu jsou 3 body.
- **Zkouška** (78 bodů)
  - Písemná zkouška skládající se ze tří částí po 26 bodech, přičemž z každé části je nutné získat nejméně 10 bodů.

Teoretická informatika

Teoretická informatika — vědní obor na pomezí mezi informatikou a matematikou

- zkoumání obecných otázek týkajících se algoritmů a výpočtů
- zkoumání různých formalismů pro popis algoritmů
- zkoumání různých prostředků pro popis syntaxe a sémantiky formálních jazyků (zejména s důrazem na programovací jazyky)
- matematický přístup k analýze a řešení problémů (dokazování obecně platných matematických tvrzení týkajících se algoritmů)

Teoretická informatika

Příklady některých typických otázek studovaných v teoretické informatice:

- Je možné daný problém řešit pomocí nějakého algoritmu?
- Pokud je možné daný problém řešit pomocí algoritmu, jaká je výpočetní složitost tohoto algoritmu?
- Existuje pro daný problém nějaký efektivní algoritmus, který ho řeší?
- Jak se přesvědčit o tom, že daný algoritmus je skutečně korektním řešením daného problému?
- Jaké instrukce musí umět vykonat stroj, který by mohl provádět daný algoritmus?

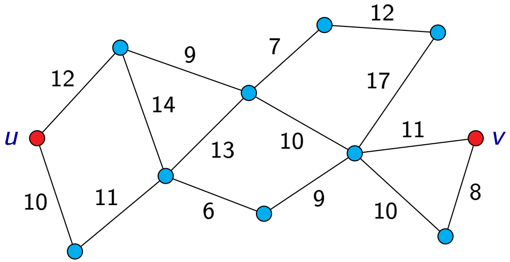
Příklad algoritmického problému

Problém „Hledání nejkratší cesty v (neorientovaném) grafu“

Vstup: Neorientovaný graf $G = (V, E)$ s ohodnocením hran, a dvojice vrcholů $u, v \in V$.

Výstup: Nejkratší cesta z vrcholu u do vrcholu v.

Příklad:



Algoritmy a problémy

Teoretická informatika se překrývá se s mnoha dalšími oblastmi matematiky a informatiky:

- teorie grafů
- teorie čísel
- výpočetní geometrie
- vyhledávání v textu
- teorie her
- ...

Logika

Logika — obor zabývající se otázkami správného vyvozování a argumentace

- zkoumání, kdy závěr vyplývá z daných předpokladů
- otázky týkající se důkazů a dokazatelnosti
- poskytuje základní jazyk matematiky a všech na matematice založených věd
- souvisí se zkoumáním základů matematiky
- využívá se v informatice na mnoha různých úrovních

Výroková logika

Logické vyvozování

- *Jestliže měl vlak zpoždění a na nádraží nebyly taxíky, tak Honza přišel pozdě do práce.*
- *Honza nepřišel do práce pozdě.*
- *Vlak měl zpoždění.*

- *Na nádraží byly taxíky.*

- *Jestliže pršelo a Jana neměla s sebou deštník, tak zmokla.*
- *Jana nezmokla.*
- *Pršelo.*

- *Jana měla s sebou deštník.*

Logické vyvozování

p	Vlak měl zpoždění.	Pršelo.
q	Na nádraží byly taxíky.	Jana měla s sebou deštník.
r	Honza přišel pozdě do práce.	Jana zmokla.

Jestliže p a ne q, tak r.
Ne r.
p.

---

q.

Výroky

Příklady výroků:

- „*Jana zmokla.*“
- „*Jestliže pršelo a Jana neměla s sebou deštník, tak zmokla.*“
- „*Paříž je hlavním městem Japonska.*“
- „*Existuje nekonečně mnoho prvočísel.*“
- „$1 + 1 = 3$“
- „*Číslo* $\sqrt{2}$ *je iracionální.*“

Logické spojky

Atomický výrok — nedá se rozložit na žádné menší výroky

„Jana zmokla."

Složený výrok — složen z menších jednodušších výroků

„Jestliže pršelo a Jana neměla s sebou deštník, tak zmokla."

Složeno z výroků:

- *„Pršelo."*
- *„Jana měla s sebou deštník."*
- *„Jana zmokla."*

Logické spojky

Z výroků je možné vytvářet složitější výroky pomocí **logických spojek**:

Symbol	Log. spojka	Příklad použití	Neformální význam
$\neg$	negace	$\neg p$	*„není pravda p"*
$\wedge$	konjunkce	$p \wedge q$	*„p a q"*
$\vee$	disjunkce	$p \vee q$	*„p nebo q"*
$\rightarrow$	implikace	$p \rightarrow q$	*„jestliže p, pak q"*
$\leftrightarrow$	ekvivalence	$p \leftrightarrow q$	*„p právě tehdy, když q"*

Atomické výroky — p, q, r, ...
(případně s indexy — p_0, p_1, p_2, ...)

Logické spojky

Výroky jsou reprezentovány pomocí **formulí** — formule mají přesně danou syntaxi a sémantiku.

„Jestliže pršelo a Jana neměla s sebou deštník, tak zmokla."

Zápis pomocí formule:

$$(p \wedge \neg q) \rightarrow r$$

Atomické výroky:

- p — *„Pršelo."*
- q — *„Jana měla s sebou deštník."*
- r — *„Jana zmokla."*

Pravdivostní hodnoty

1	0
pravda	nepravda
ano	ne
true	false

Pro označení pravdivostních hodnot budeme používat 0 a 1.

Pravdivostní hodnoty se též označují jako hodnoty **booleovské**.

Negace

Negací výroku φ je výrok *„není pravda, že* φ*"*. Například negací výroku

„číslo 5 *je prvočíslo"*

je výrok

„není pravda, že číslo 5 *je prvočíslo"*

nebo

„číslo 5 *není prvočíslo"*.

Ve formulích se negace označuje symbolem "$\neg$".

Formální zápis: $\neg\varphi$

φ	$\neg\varphi$
0	1
1	0

Konjunkce

Konjunkcí výroků φ a ψ je výrok „φ *a* ψ“.

Příklad: Konjunkcí výroků *„Kodaň je hlavním městem Dánska“* a „$2 + 2 = 4$“ je výrok

„Kodaň je hlavním městem Dánska a $2 + 2 = 4$.“

Ve formulích se konjunkce označuje pomocí symbolu „$\wedge$“.

$$p \wedge q$$

- p — *„Kodaň je hlavním městem Dánska“*
- q — „$2 + 2 = 4$“

Konjunkce

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Příklady nepravdivých výroků:

- *„Helsinky jsou hlavním městem Itálie a Karlova univerzita byla založena v roce 1348.“*
- *„Asie je světadíl s největší rozlohou a* $3 + 5 = 14$*.“*
- *„Existuje jen konečně mnoho prvočísel a Plzeň je hlavním městem USA.“*

Disjunkce

Disjunkcí výroků φ a ψ je výrok „φ *nebo* ψ“.

Příklad: Disjunkcí výroků *„velryby patří mezi savce“* a *„ČR leží v mírném podnebném pásu“* je výrok

„velryby patří mezi savce nebo ČR leží v mírném podnebném pásu“.

Ve formulích se disjunkce označuje symbolem “$\vee$”.

$$p \vee q$$

- p — *„velryby patří mezi savce“*
- q — *„ČR leží v mírném podnebném pásu“*

Disjunkce

Disjunkce je „*nebo*“ v **nevylučujícím** smyslu.

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Implikace

Implikace — *„jestliže* φ*, pak* ψ*“*

- φ — předpoklad
- ψ — závěr

Příklad:

> *„Jestliže se Petr dobře připravil na zkoušku, pak z této zkoušky dostal dobrou známku.“*

Implikace se označuje symbolem “$\rightarrow$”.

$$p \rightarrow q$$

- p — *„Petr se dobře připravil na zkoušku“*
- q — *„Petr dostal z této zkoušky dobrou známku“*

Implikace

φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Poznámka: Formule $p \rightarrow q$ je pravdivá právě v těch případech, kdy je pravdivá formule

$$\neg p \vee q\,.$$

Implikace

Implikace **nevyjařuje** příčinnou souvislost.

Příklad:

- *„Jestliže je Washington hlavním městem USA, tak* $1 + 1 = 2$*."*
- *„Jestliže je Washington hlavním městem USA, tak* $1 + 1 = 3$*."*
- *„Jestliže je Tokio hlavním městem USA, tak* $1 + 1 = 2$*."*
- *„Jestliže je Tokio hlavním městem USA, tak* $1 + 1 = 3$*."*

Implikace

Příklady různých způsobů vyjádření tvrzení $p \rightarrow q$ v přirozené řeči:

- *„pokud p, pak q“*
- *„když p, tak q“*
- *„q, pokud p“*
- *„z p plyne q“*
- *„za předpokladu p platí q“*
- *„p implikuje q“*
- *„q platí tehdy, když platí p“*
- *„p platí jen tehdy, když platí q“*
- *„p je postačující podmínka pro q“*
- *„q je nutná podmínka pro p“*

Implikace

Pokud platí $\varphi \rightarrow \psi$ a zároveň platí φ, je možné z toho vyvodit, že platí i ψ.

Příklad: Pokud platí

- *„jestliže je dnes úterý, pak je zítra středa"*
- *„dnes je úterý"*

lze z toho vyvodit, že platí

- *„zítra je středa"*

Ekvivalence

Ekvivalence — „φ *právě tehdy, když* ψ“

Příklad:

„Trojúhelník ABC má všechny tři strany stejně dlouhé právě tehdy, když má všechny tři úhly stejně velké.“

Logická spojka ekvivalence se označuje symbolem “$\leftrightarrow$”

$$p \leftrightarrow q$$

- p — *„trojúhelník ABC má všechny tři strany stejně dlouhé“*
- q — *„trojúhelník ABC má všechny tři úhly stejně velké“*

Ekvivalence

φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Poznámka: Formule $p \leftrightarrow q$ říká v podstatě to samé co formule

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

Ekvivalence

Alternativní způsoby vyjádření ekvivalence $p \leftrightarrow q$ v přirozené řeči:

- *„p tehdy a jen tehdy, když q“*
- *„p je nutnou a postačující podmínkou pro to, aby platilo q“*

Ekvivalence se často používá v **definicích** nových pojmů:

Příklad:

- *„Trojúhelník je rovnoramenný právě tehdy, když alespoň dvě jeho strany jsou stejně dlouhé.“*
- *„Trojúhelník je rovnoramenný, jestliže alespoň dvě jeho strany jsou stejně dlouhé.“*

Formule výrokové logiky

- **Syntaxe** — jak vypadají formule výrokové logiky
- **Sémantika** — přiřazuje formulím a jednotlivým symbolům, které se v nich vyskytují, přesně definovaný význam

Syntaxe formulí výrokové logiky

Formule — posloupnosti symbolů z určité **abecedy**:

- **atomické výroky** — například symboly "p", "q", "r", apod.
- **logické spojky** — symboly "$\neg$", "$\wedge$", "$\vee$" "$\rightarrow$" a "$\leftrightarrow$"
- **závorky** — symboly "$($" a "$)$"

Ne každá posloupnost těchto symbolů je formulí.

Například toto formule není:

$$\wedge\vee)p\neg((\neg$$

Syntaxe formulí výrokové logiky

Definice

Dobře utvořené **formule výrokové logiky** jsou posloupnosti symbolů vytvořené podle následujících tří pravidel:

1. Jestliže p je atomický výrok, pak p je dobře utvořená formule.
2. Jestliže φ a ψ jsou dobře utvořené formule, pak i $(\neg\varphi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ a $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ jsou dobře utvořené formule.
3. Neexistují žádné další dobře utvořené formule než ty, které jsou vytvořené pomocí předchozích dvou pravidel.

Syntaxe formulí výrokové logiky

Příklady dobře utvořených formulí:

- q
- $(\neg q)$
- r
- $((\neg q) \rightarrow r)$
- p
- $(p \leftrightarrow r)$
- $(\neg (p \leftrightarrow r))$
- $(((\neg q) \rightarrow r) \wedge (\neg (p \leftrightarrow r)))$

Příklad sekvence symbolů, která není dobře utvořenou formulí:

- $(p \wedge \vee q)$

Syntaxe formulí výrokové logiky

Formule ψ je **podformulí** formule φ, jestliže platí alespoň jedna z následujících možností:

- Formule ψ je stejná jako formule φ (tj. jedná se o jednu a tutéž formuli).
- Formule φ je tvaru $(\neg\chi)$ a ψ je podformulí formule χ.
- Formule φ je tvaru $(\chi_1 \wedge \chi_2)$, $(\chi_1 \vee \chi_2)$, $(\chi_1 \rightarrow \chi_2)$ nebo $(\chi_1 \leftrightarrow \chi_2)$, a ψ je podformulí formule χ_1 nebo podformulí formule χ_2.

Příklad: Podformule formule $((\neg(p \wedge q)) \leftrightarrow r)$:

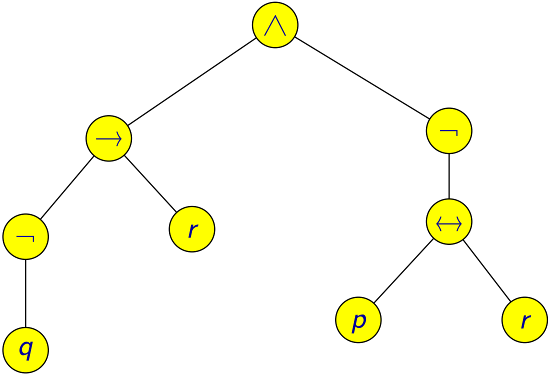
$$p \qquad q \qquad r \qquad (p \wedge q) \qquad (\neg(p \wedge q)) \qquad ((\neg(p \wedge q)) \leftrightarrow r)$$

Syntaxe formulí výrokové logiky

Alternativní symboly pro logické spojky:

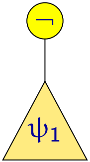
Log. spojka	Symbol	Alternativní symboly
negace	$\neg$	$\sim$
konjunkce	$\wedge$	$\&$
implikace	$\rightarrow$	$\Rightarrow$, $\supset$
ekvivalence	$\leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$, $\equiv$

Abstraktní syntaktický strom formule $(((\neg q) \rightarrow r) \wedge (\neg(p \leftrightarrow r)))$:

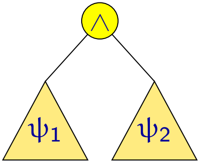


p

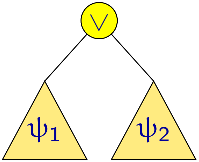
$(\neg\psi_1)$



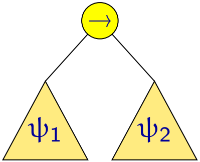
$(\psi_1 \wedge \psi_2)$



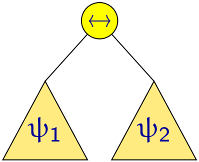
$(\psi_1 \vee \psi_2)$



$(\psi_1 \rightarrow \psi_2)$



$(\psi_1 \leftrightarrow \psi_2)$



Arita logických spojek:

- **unární** spojka (arita 1): $\neg$
- **binární** spojky (arita 2): $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

Syntaxe formulí výrokové logiky

Konvence pro vypouštění závorek:

- Vnější závorky je možno vypustit.
- Priorita logických spojek (od nejvyšší po nejnižší):

$$\neg \qquad \wedge \qquad \vee \qquad \rightarrow \qquad \leftrightarrow$$

- Místo $\neg(\neg\varphi)$ je možno psát $\neg\neg\varphi$.

Příklad: Místo $((\neg p) \wedge (r \rightarrow (q \vee s)))$ je možno psát

$$\neg p \wedge (r \rightarrow q \vee s)$$

Poznámka: Další konvence budou uvedeny později.

Sémantika výrokové logiky

At — množina atomických výroků

Například

- $At = \{p, q, r\}$, nebo
- $At = \{p_0, p_1, p_2, \ldots\}$

Definice

Pravdivostní ohodnocení je přiřazení pravdivostních hodnot (tj. hodnot z množiny $\{0, 1\}$) všem atomickým výrokům z množiny At.
(Formálně je možné pravdivostní ohodnocení definovat jako funkci $v : At \to \{0, 1\}$.)

Příklad: Pravdivostní ohodnocení v pro $At = \{p, q, r\}$, kde

$$v(p) = 1 \qquad v(q) = 0 \qquad v(r) = 1$$

Sémantika výrokové logiky

Pokud je množina At konečná a obsahuje n atomických výroků, existuje celkem 2^n pravdivostních ohodnocení.

Příklad: $\mathit{At} = \{p, q, r\}$

$$
\begin{array}{llll}
v_0: & v_0(p) = 0, & v_0(q) = 0, & v_0(r) = 0 \\
v_1: & v_1(p) = 0, & v_1(q) = 0, & v_1(r) = 1 \\
v_2: & v_2(p) = 0, & v_2(q) = 1, & v_2(r) = 0 \\
v_3: & v_3(p) = 0, & v_3(q) = 1, & v_3(r) = 1 \\
v_4: & v_4(p) = 1, & v_4(q) = 0, & v_4(r) = 0 \\
v_5: & v_5(p) = 1, & v_5(q) = 0, & v_5(r) = 1 \\
v_6: & v_6(p) = 1, & v_6(q) = 1, & v_6(r) = 0 \\
v_7: & v_7(p) = 1, & v_7(q) = 1, & v_7(r) = 1
\end{array}
$$

Sémantika výrokové logiky

Formule φ má při pravdivostním ohodnocení v pravdivostní hodnotu 1:

$$v \models \varphi$$

Formule φ má při pravdivostním ohodnocení v pravdivostní hodnotu 0:

$$v \not\models \varphi$$

Sémantika výrokové logiky

Definice

Pravdivostní hodnoty formulí výrokové logiky při daném pravdivostním ohodnocení v jsou definovány následujícím způsobem:

- Pro atomický výrok p platí $v \models p$ právě tehdy, když $v(p) = 1$. (Pokud je tedy $v(p) = 0$, tak $v \not\models p$.)
- $v \models \neg\varphi$ právě tehdy, když $v \not\models \varphi$.
- $v \models \varphi \wedge \psi$ právě tehdy, když $v \models \varphi$ a $v \models \psi$.
- $v \models \varphi \vee \psi$ právě tehdy, když $v \models \varphi$ nebo $v \models \psi$.
- $v \models \varphi \rightarrow \psi$ právě tehdy, když $v \not\models \varphi$ nebo $v \models \psi$.
- $v \models \varphi \leftrightarrow \psi$ právě tehdy, když $v \models \varphi$ a $v \models \psi$, nebo když $v \not\models \varphi$ a $v \not\models \psi$.

Sémantika výrokové logiky

φ	$\neg\varphi$
0	1
1	0

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \rightarrow \psi$	$\varphi \leftrightarrow \psi$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Příklad: $At = \{p, q, r\}$
pravdivostní ohodnocení v, kde $v(p) = 1$, $v(q) = 0$ a $v(r) = 1$

p	q	r	$\neg q$	$\neg q \rightarrow r$	$p \leftrightarrow r$	$\neg(p \leftrightarrow r)$	φ

$\varphi \; := \; (\neg q \rightarrow r) \wedge \neg(p \leftrightarrow r)$

Sémantika výrokové logiky

Příklad: $At = \{p, q, r\}$
pravdivostní ohodnocení v, kde $v(p) = 1$, $v(q) = 0$ a $v(r) = 1$

- $v \models p$
- $v \not\models q$
- $v \models r$

p	q	r	$\neg q$	$\neg q \rightarrow r$	$p \leftrightarrow r$	$\neg(p \leftrightarrow r)$	φ
1	0	1					

$\varphi \ := \ (\neg q \rightarrow r) \wedge \neg(p \leftrightarrow r)$

Příklad: $At = \{p, q, r\}$

pravdivostní ohodnocení v, kde $v(p) = 1$, $v(q) = 0$ a $v(r) = 1$

- $v \models p$
- $v \not\models q$
- $v \models r$
- $v \models \neg q$

p	q	r	$\neg q$	$\neg q \rightarrow r$	$p \leftrightarrow r$	$\neg(p \leftrightarrow r)$	φ
1	0	1	1				

$\varphi \ := \ (\neg q \rightarrow r) \wedge \neg(p \leftrightarrow r)$

Sémantika výrokové logiky

Příklad: $At = \{p, q, r\}$
pravdivostní ohodnocení v, kde $v(p) = 1$, $v(q) = 0$ a $v(r) = 1$

- $v \models p$
- $v \not\models q$
- $v \models r$
- $v \models \neg q$
- $v \models \neg q \rightarrow r$

p	q	r	$\neg q$	$\neg q \rightarrow r$	$p \leftrightarrow r$	$\neg(p \leftrightarrow r)$	φ
1	0	1	1	1			

$\varphi \ := \ (\neg q \rightarrow r) \wedge \neg(p \leftrightarrow r)$

Sémantika výrokové logiky

Příklad: $\mathit{At} = \{p, q, r\}$
pravdivostní ohodnocení v, kde $v(p) = 1$, $v(q) = 0$ a $v(r) = 1$

- $v \models p$
- $v \not\models q$
- $v \models r$
- $v \models \neg q$
- $v \models \neg q \rightarrow r$
- $v \models p \leftrightarrow r$

p	q	r	$\neg q$	$\neg q \rightarrow r$	$p \leftrightarrow r$	$\neg(p \leftrightarrow r)$	φ
1	0	1	1	1	1		

$\varphi \ := \ (\neg q \rightarrow r) \wedge \neg(p \leftrightarrow r)$

Sémantika výrokové logiky

Příklad: $At = \{p, q, r\}$
pravdivostní ohodnocení v, kde $v(p) = 1$, $v(q) = 0$ a $v(r) = 1$

- $v \models p$
- $v \not\models q$
- $v \models r$
- $v \models \neg q$
- $v \models \neg q \rightarrow r$
- $v \models p \leftrightarrow r$
- $v \not\models \neg(p \leftrightarrow r)$

p	q	r	$\neg q$	$\neg q \rightarrow r$	$p \leftrightarrow r$	$\neg(p \leftrightarrow r)$	φ
1	0	1	1	1	1	0	

$\varphi \;:=\; (\neg q \rightarrow r) \wedge \neg(p \leftrightarrow r)$

Příklad: $\mathit{At} = \{p, q, r\}$
pravdivostní ohodnocení v, kde $v(p) = 1$, $v(q) = 0$ a $v(r) = 1$

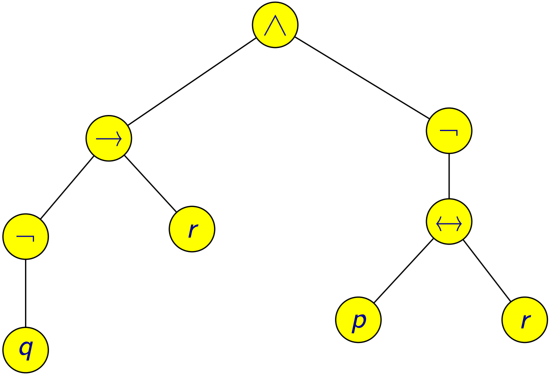
- $v \models p$
- $v \not\models q$
- $v \models r$
- $v \models \neg q$
- $v \models \neg q \rightarrow r$
- $v \models p \leftrightarrow r$
- $v \not\models \neg(p \leftrightarrow r)$
- $v \not\models (\neg q \rightarrow r) \wedge \neg(p \leftrightarrow r)$

p	q	r	$\neg q$	$\neg q \rightarrow r$	$p \leftrightarrow r$	$\neg(p \leftrightarrow r)$	φ
1	0	1	1	1	1	0	0

$\varphi \;:=\; (\neg q \rightarrow r) \wedge \neg(p \leftrightarrow r)$

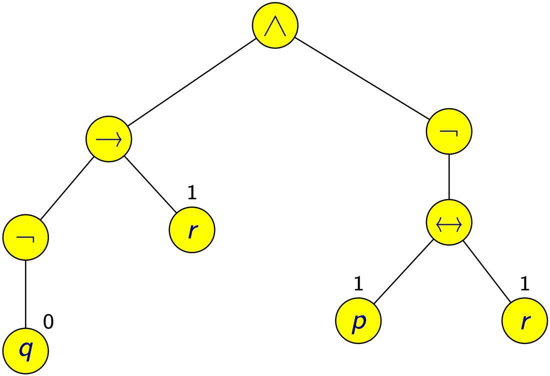
Sémantika výrokové logiky

$\varphi \ := \ (\neg q \rightarrow r) \wedge \neg(p \leftrightarrow r)$



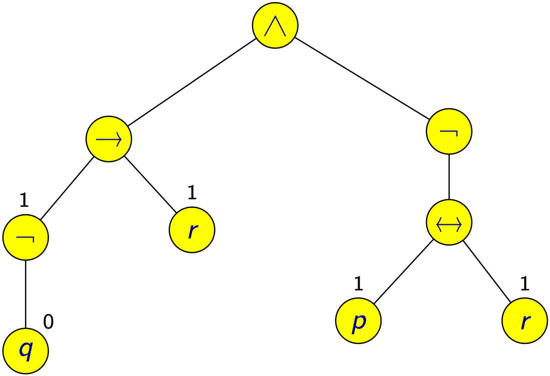
p	q	r	$\neg q$	$\neg q \rightarrow r$	$p \leftrightarrow r$	$\neg(p \leftrightarrow r)$	φ

$\varphi \; := \; (\neg q \rightarrow r) \wedge \neg(p \leftrightarrow r)$



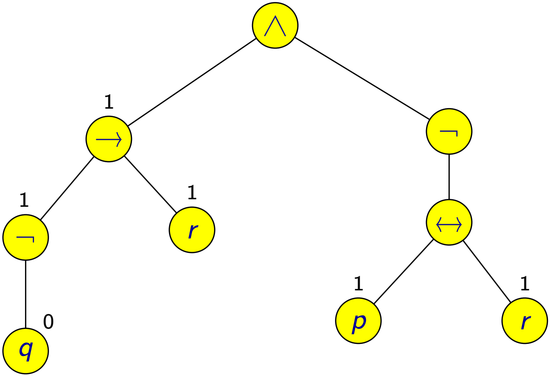
p	q	r	$\neg q$	$\neg q \rightarrow r$	$p \leftrightarrow r$	$\neg(p \leftrightarrow r)$	φ
1	0	1					

$\varphi := (\neg q \rightarrow r) \wedge \neg(p \leftrightarrow r)$



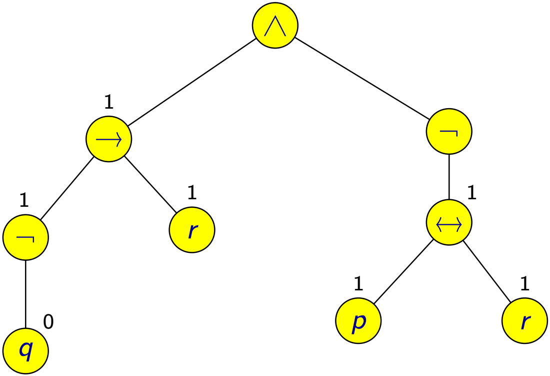
p	q	r	$\neg q$	$\neg q \rightarrow r$	$p \leftrightarrow r$	$\neg(p \leftrightarrow r)$	φ
1	0	1	1				

$\varphi \;:=\; (\neg q \rightarrow r) \wedge \neg(p \leftrightarrow r)$



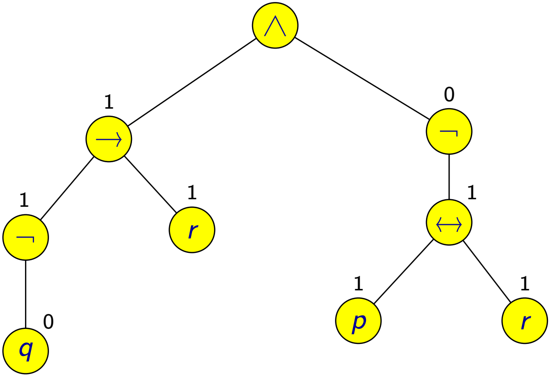
p	q	r	$\neg q$	$\neg q \rightarrow r$	$p \leftrightarrow r$	$\neg(p \leftrightarrow r)$	φ
1	0	1	1	1			

$$\varphi := (\neg q \rightarrow r) \wedge \neg(p \leftrightarrow r)$$



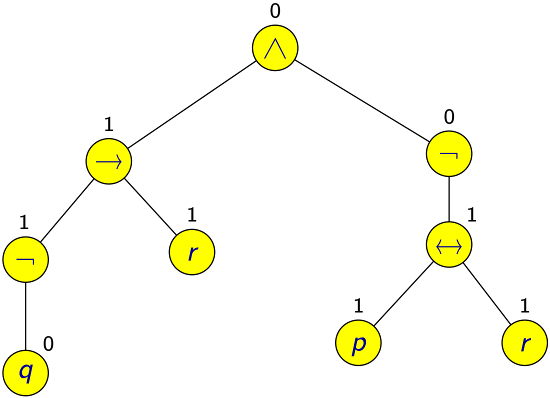
p	q	r	$\neg q$	$\neg q \rightarrow r$	$p \leftrightarrow r$	$\neg(p \leftrightarrow r)$	φ
1	0	1	1	1	1		

$$\varphi := (\neg q \rightarrow r) \wedge \neg(p \leftrightarrow r)$$



p	q	r	$\neg q$	$\neg q \rightarrow r$	$p \leftrightarrow r$	$\neg(p \leftrightarrow r)$	φ
1	0	1	1	1	1	0	

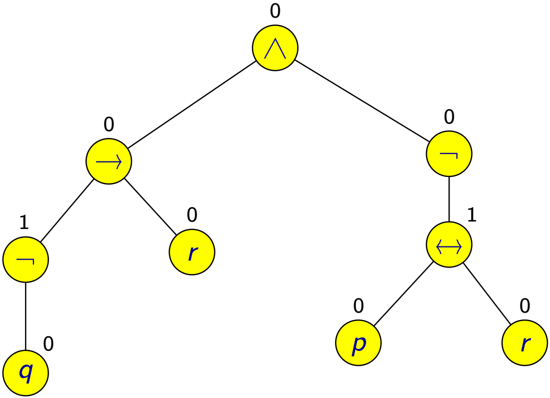
$\varphi := (\neg q \rightarrow r) \wedge \neg(p \leftrightarrow r)$



p	q	r	$\neg q$	$\neg q \rightarrow r$	$p \leftrightarrow r$	$\neg(p \leftrightarrow r)$	φ
1	0	1	1	1	1	0	0

Sémantika výrokové logiky

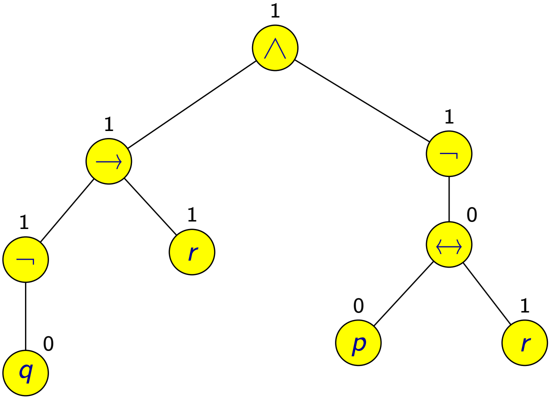
$\varphi \;:=\; (\neg q \rightarrow r) \wedge \neg(p \leftrightarrow r)$



$v_0(p) = 0 \qquad v_0(q) = 0 \qquad v_0(r) = 0$

Sémantika výrokové logiky

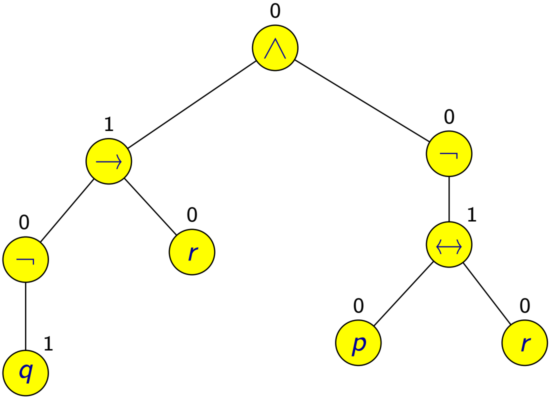
$\varphi \;:=\; (\neg q \rightarrow r) \wedge \neg(p \leftrightarrow r)$



$v_1(p) = 0 \qquad v_1(q) = 0 \qquad v_1(r) = 1$

Sémantika výrokové logiky

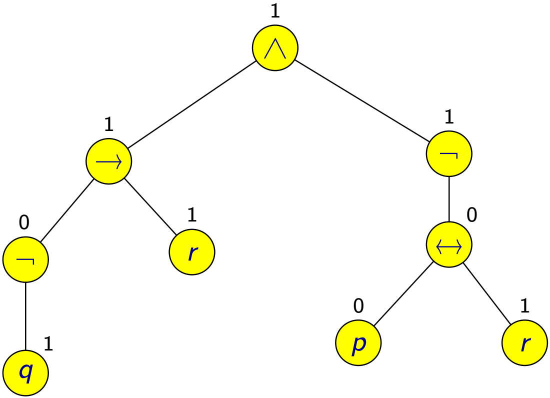
$\varphi \ := \ (\neg q \rightarrow r) \wedge \neg(p \leftrightarrow r)$



$v_2(p) = 0 \qquad v_2(q) = 1 \qquad v_2(r) = 0$

Sémantika výrokové logiky

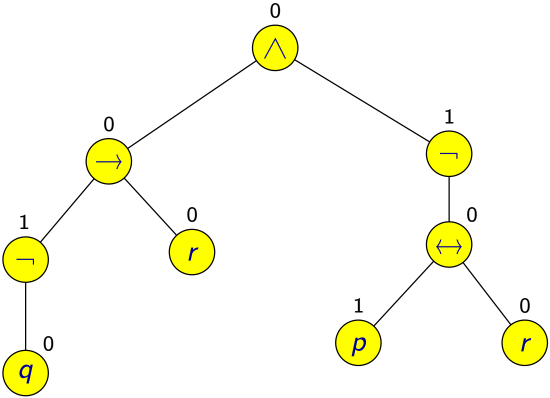
$\varphi := (\neg q \to r) \wedge \neg(p \leftrightarrow r)$



$v_3(p) = 0 \qquad v_3(q) = 1 \qquad v_3(r) = 1$

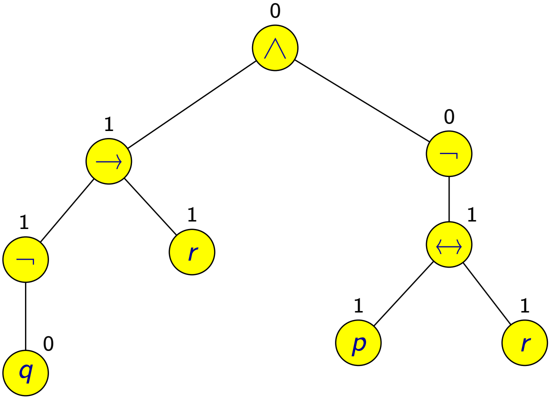
Sémantika výrokové logiky

$\varphi \;:=\; (\neg q \rightarrow r) \wedge \neg(p \leftrightarrow r)$



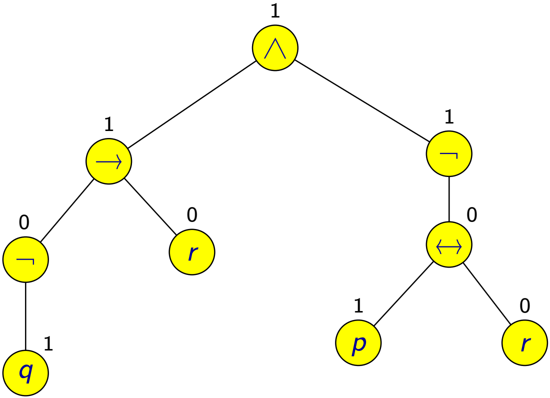
$v_4(p) = 1 \qquad v_4(q) = 0 \qquad v_4(r) = 0$

$\varphi := (\neg q \to r) \wedge \neg(p \leftrightarrow r)$



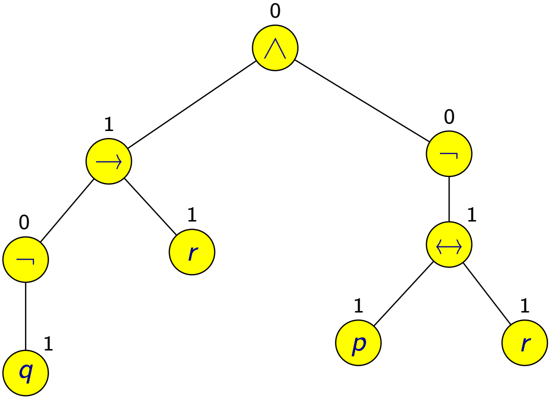
$v_5(p) = 1 \qquad v_5(q) = 0 \qquad v_5(r) = 1$

$\varphi := (\neg q \to r) \wedge \neg(p \leftrightarrow r)$



$v_6(p) = 1 \qquad v_6(q) = 1 \qquad v_6(r) = 0$

$\varphi := (\neg q \rightarrow r) \wedge \neg(p \leftrightarrow r)$



$v_7(p) = 1 \qquad v_7(q) = 1 \qquad v_7(r) = 1$

$\varphi \;:=\; (\neg q \rightarrow r) \wedge \neg(p \leftrightarrow r)$

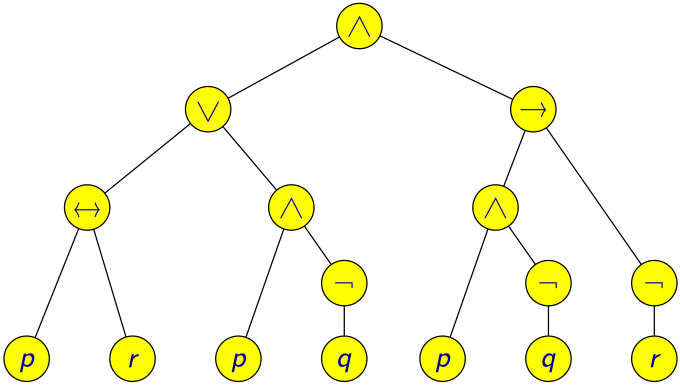
p	q	r	$\neg q$	$\neg q \rightarrow r$	$p \leftrightarrow r$	$\neg(p \leftrightarrow r)$	φ
0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	1	1	0	0

Ohodnocení, při kterých je daná formule pravdivá, jsou jejími **modely**:

$$
\begin{array}{llll}
v_1: & v_1(p) = 0, & v_1(q) = 0, & v_1(r) = 1, \\
v_3: & v_3(p) = 0, & v_3(q) = 1, & v_3(r) = 1, \\
v_6: & v_6(p) = 1, & v_6(q) = 1, & v_6(r) = 0,
\end{array}
$$

Formule reprezentované jako orientované acyklické grafy

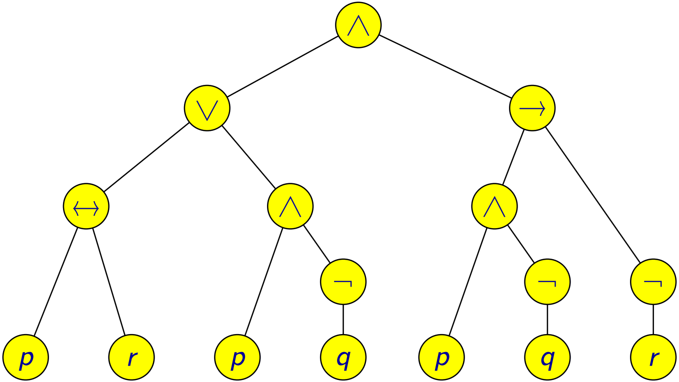
$\varphi := ((p \leftrightarrow r) \vee (p \wedge \neg q)) \wedge ((p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r)$



V abstraktním syntaktickém stromě odpovídají vrcholy všem **výskytům** jednotlivých podformulí.

Formule reprezentované jako orientované acyklické grafy

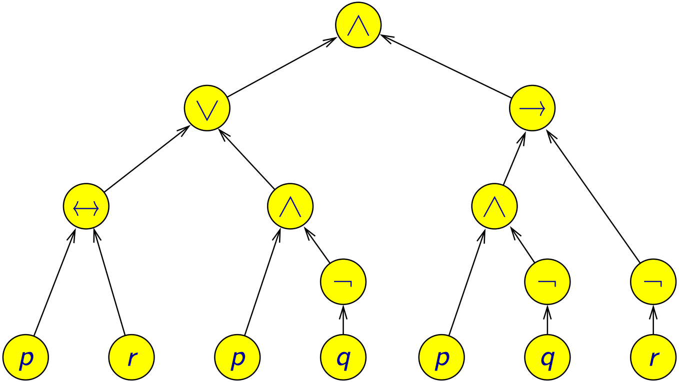
$\varphi := ((p \leftrightarrow r) \vee (p \wedge \neg q)) \wedge ((p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r)$



Alternativně můžeme formuli znázornit jako **orientovaný acyklický graf**.

Formule reprezentované jako orientované acyklické grafy

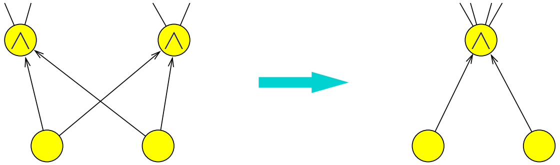
$\varphi \;:=\; ((p \leftrightarrow r) \vee (p \wedge \neg q)) \;\wedge\; ((p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r)$



Nejprve hranám přiřadíme orientaci od potomků k rodičům.

Formule reprezentované jako orientované acyklické grafy

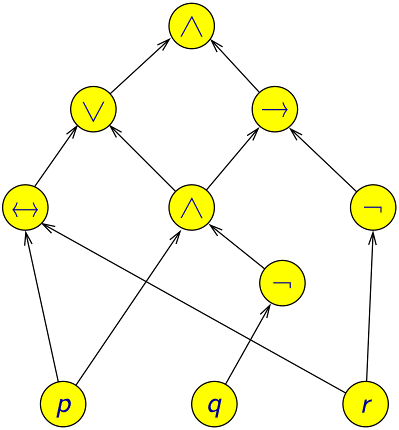
- Ztotožníme všechny listy označené stejným atomickým výrokem.
- Následně je možné ztotožnit vrcholy, které jsou označeny stejným symbolem a mají stejné předchůdce.



- Taková ztotožnění je možné provádět opakovaně — když jsou některé vrcholy ztotožněny, může být možné ztotožnit některé další vrcholy.

Formule reprezentované jako orientované acyklické grafy

$\varphi \;:=\; ((p \leftrightarrow r) \vee (p \wedge \neg q)) \;\wedge\; ((p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r)$

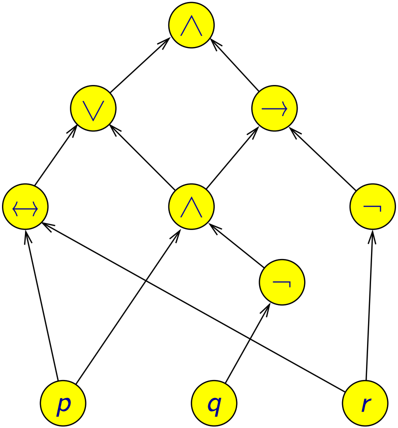


Formule reprezentované jako orientované acyklické grafy

- Když tímto způsobem ztotožníme všechny vrcholy, které je takto možno ztotožnit, dostaneme graf, kde jednotlivé vrcholy odpovídají jednotlivým různým podformulím dané formule.
- Na acyklický orientovaný graf reprezentující danou formuli je možné se dívat jako na **logický obvod**:
  - **Vstupy** — vrcholy označené atomickými výroky
  - **Výstup** — vrchol odpovídající celé formuli

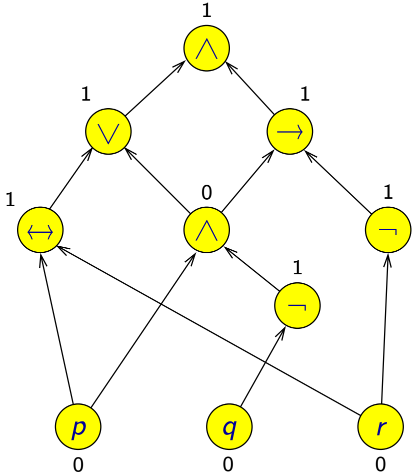
Formule reprezentované jako orientované acyklické grafy

$\varphi \; := \; ((p \leftrightarrow r) \vee (p \wedge \neg q)) \; \wedge \; ((p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r)$



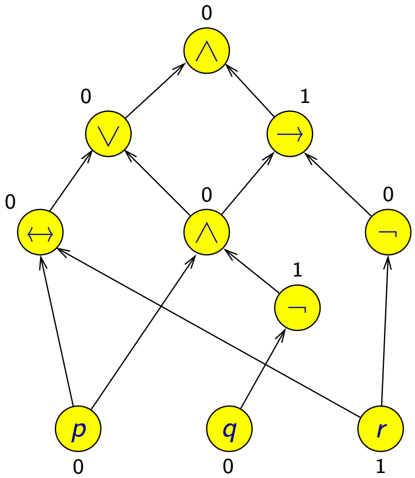
Formule reprezentované jako orientované acyklické grafy

$\varphi := ((p \leftrightarrow r) \vee (p \wedge \neg q)) \wedge ((p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r)$



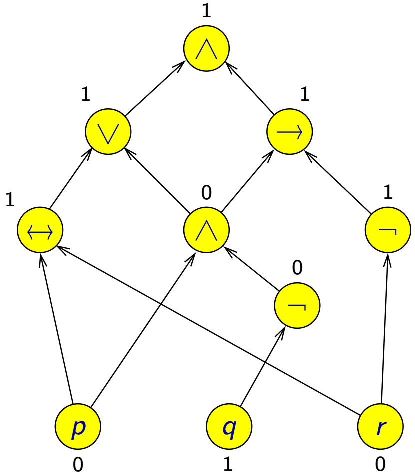
Formule reprezentované jako orientované acyklické grafy

$\varphi \;:=\; ((p \leftrightarrow r) \vee (p \wedge \neg q)) \;\wedge\; ((p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r)$



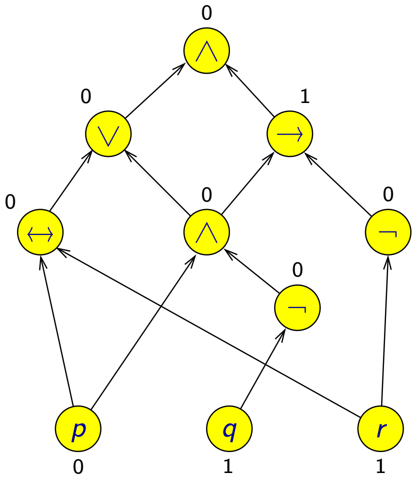
Formule reprezentované jako orientované acyklické grafy

$$\varphi \ := \ ((p \leftrightarrow r) \vee (p \wedge \neg q)) \ \wedge \ ((p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r)$$



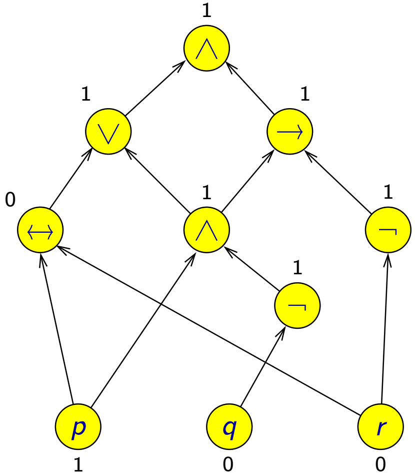
Formule reprezentované jako orientované acyklické grafy

$$\varphi := ((p \leftrightarrow r) \vee (p \wedge \neg q)) \wedge ((p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r)$$



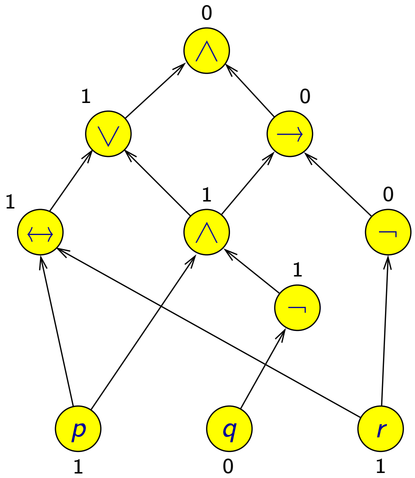
Formule reprezentované jako orientované acyklické grafy

$\varphi \;:=\; ((p \leftrightarrow r) \vee (p \wedge \neg q)) \;\wedge\; ((p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r)$



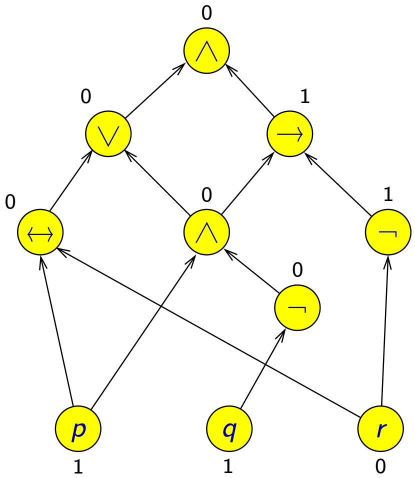
Formule reprezentované jako orientované acyklické grafy

$\varphi \;:=\; ((p \leftrightarrow r) \vee (p \wedge \neg q)) \;\wedge\; ((p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r)$



Formule reprezentované jako orientované acyklické grafy

$\varphi \ := \ ((p \leftrightarrow r) \vee (p \wedge \neg q)) \ \wedge \ ((p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r)$



Formule reprezentované jako orientované acyklické grafy

$\varphi := ((p \leftrightarrow r) \vee (p \wedge \neg q)) \wedge ((p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r)$