Tautologie

Definice

Formule φ je **tautologie**, jestliže pro každé pravdivostní ohodnocení v platí $v \models \varphi$ (tj. pokud φ je pravdivá při každém pravdivostním ohodnocení).

Příklad: *„Jestliže venku prší, tak venku prší."*

$$p \rightarrow p$$

Příklad: *„Dnes je pátek nebo dnes není pátek."*

$$q \vee \neg q$$

Tautologie

Příklad komplikovanější tautologie:

$$(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p)$$

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q$	$p \rightarrow \neg q$	$\neg p$	$(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p$	φ
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1	1

Tautologie

Důležité jsou zejména tautologie tvaru $\varphi \rightarrow \psi$ nebo $\varphi \leftrightarrow \psi$
— dají se použít pro logické vyvozování:

- Pokud platí $\varphi \rightarrow \psi$ a zároveň platí φ, musí platit i ψ.

  Speciálně, pokud $\varphi \rightarrow \psi$ je tautologie, z platnosti φ se dá vyvodit, že platí i ψ.

  Příklad: $(p \wedge q) \rightarrow p$ je tautologie.

  Pokud platí $p \wedge q$, tak platí i p.

  Příklad: $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ je tautologie.

  Pokud platí $p \rightarrow q$ a zároveň platí $\neg q$, tak platí $\neg p$.

Tautologie

- Pokud platí $\varphi \leftrightarrow \psi$ a zároveň platí φ, musí platit i ψ.

  Podobně, pokud platí $\varphi \leftrightarrow \psi$ a zároveň platí ψ, musí platit i φ.

  Příklad: $(\neg p \rightarrow q) \leftrightarrow (q \vee p)$ je tautologie.

  - Pokud platí $\neg p \rightarrow q$, tak musí platit i $q \vee p$.
  - Pokud platí $q \vee p$, tak musí platit i $\neg p \rightarrow q$.

Tautologie

Pokud v tautologii φ nahradíme jednotlivé atomické výroky libovolnými formulemi, dostaneme opět tautologii.

Příklad: Formule $p \rightarrow (p \vee q)$ je tautologie.

Pro libovolné formule ψ a χ proto platí, že

$$\psi \rightarrow (\psi \vee \chi)$$

je tautologie.

Náhrada atomických výroků:

- p nahradíme $q \vee \neg(r \rightarrow \neg s)$
- q nahradíme $\neg\neg(q \leftrightarrow p)$

Dostaneme tautologii

$$(q \vee \neg(r \rightarrow \neg s)) \rightarrow ((q \vee \neg(r \rightarrow \neg s)) \vee \neg\neg(q \leftrightarrow p))$$

Kontradikce

Definice

Formule φ je **kontradikce**, jestliže pro každé pravdivostní ohodnocení v platí $v \not\models \varphi$ (tj. pokud φ je při každém pravdivostním ohodnocení nepravdivá).

Příklad: *„Dnes je středa a dnes není středa.“*

$$p \wedge \neg p$$

- φ je tautologie právě tehdy, když $\neg\varphi$ je kontradikce
- φ je kontradikce právě tehdy, když $\neg\varphi$ je tautologie

Splnitelné formule

Definice

Formule φ je **splnitelná**, jestliže existuje alespoň jedno pravdivostní ohodnocení v, pro které je $v \models \varphi$.

- Formule je splnitelná právě tehdy, když není kontradikcí.
- Každá tautologie je splnitelná, ale ne každá splnitelná formule je tautologie.

Příklad: Formule, která je splnitelná, ale není tautologie:

$$(p \vee q) \rightarrow p$$

- Například při ohodnocení v_1, kde $v_1(p) = 1$ a $v_1(q) = 0$, je pravdivá.
- Při ohodnocení v_2, kde $v_2(p) = 0$ a $v_2(q) = 1$, je nepravdivá.

Splnitelné formule

- φ je tautologie právě tehdy, když $\neg\varphi$ není splnitelná
- φ je splnitelná právě tehdy, když $\neg\varphi$ není tautologie

- **Splnitelná formule**:
  - Abychom ukázali, že formule **je** splnitelná, stačí najít ohodnocení, při kterém je pravdivá.
  - Abychom ukázali, že formule **není** splnitelná, je třeba ukázat, že neexistuje žádné ohodnocení, při kterém by byla pravdivá.

Tautologie a kontradikce

- **Tautologie**:
  - Abychom ukázali, že formule **není** tautologie, stačí najít ohodnocení, při kterém není pravdivá.
  - Abychom ukázali, že formule **je** tautologie, je třeba ukázat, že neexistuje žádné ohodnocení, při kterém není pravdivá.
- **Kontradikce**:
  - Abychom ukázali, že formule **není** kontradikce, stačí najít ohodnocení, při kterém je pravdivá.
  - Abychom ukázali, že formule **je** kontradikce, je třeba ukázat, že neexistuje žádné ohodnocení, při kterém by byla pravdivá.

Pravdivostní ohodnocení

Při zdůvodňování toho, že formule φ je/není tautogie (resp. kontradikce, splnitelná) můžeme použít **tabulkovou metodu**:

- Systematicky probrat všechna možná pravdivostní ohodnocení.

Většinou ovšem není potřeba vytvářet celou tabulku, ale stačí se soutředit na „zajímavé“ případy.

- Můžeme si nakreslit graf reprezentující danou formuli a zkusit přiřadit vrcholům hodnoty 0 a 1 tak, abychom buď našli příklad ohodnocení, které nás zajímá (např. nějaké ohodnocení, při kterém je daná formule nepravdivá), nebo zjistili, že takové ohodnocení neexistuje.

Pravdivostní ohodnocení

Například pro zjištění toho, zda formule je/není tautologie:

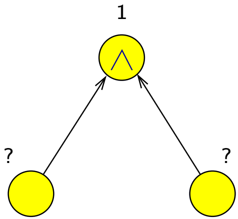
- Je třeba zjistit, zda existuje nějaké ohodnocení, při kterém je tato formule nepravdivá.
- Při takovém ohodnocení by vrchol, který odpovídá celé formuli, měl přiřazenu hodnotu 0.
- Tomuto vrcholu tedy zkusíme přiřadit hodnotu 0.
- Zkoušíme postupně doplňovat hodnoty k dalším vrcholům tak, aby byly konzistentní s dříve přiřazenými hodnotami.
- Pokud se podaří celý graf konzistentně ohodnotit, máme ohodnocení, při kterém formule není pravdivá.

  V tomto případě je pak jasné, že daná formule není tautologie.

Pravdivostní ohodnocení

- Pokud už jsou některým vrcholům pravdivostní hodnoty přiřazeny, může toto přiřazení klást omezení na to, jaké hodnoty je možno přiřadit dalším vrcholům.
- Příklady toho, kdy dříve přiřazené hodnoty vynucují určitou hodnotu u dalšího vrcholu (nebo i více vrcholů):

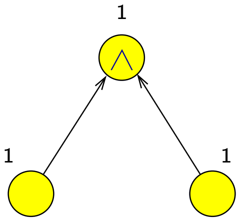
φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Pravdivostní ohodnocení

- Pokud už jsou některým vrcholům pravdivostní hodnoty přiřazeny, může toto přiřazení klást omezení na to, jaké hodnoty je možno přiřadit dalším vrcholům.
- Příklady toho, kdy dříve přiřazené hodnoty vynucují určitou hodnotu u dalšího vrcholu (nebo i více vrcholů):

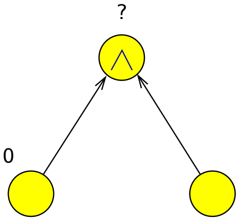
φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Pravdivostní ohodnocení

- Pokud už jsou některým vrcholům pravdivostní hodnoty přiřazeny, může toto přiřazení klást omezení na to, jaké hodnoty je možno přiřadit dalším vrcholům.
- Příklady toho, kdy dříve přiřazené hodnoty vynucují určitou hodnotu u dalšího vrcholu (nebo i více vrcholů):

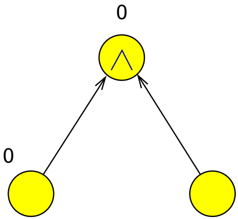
φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Pravdivostní ohodnocení

- Pokud už jsou některým vrcholům pravdivostní hodnoty přiřazeny, může toto přiřazení klást omezení na to, jaké hodnoty je možno přiřadit dalším vrcholům.
- Příklady toho, kdy dříve přiřazené hodnoty vynucují určitou hodnotu u dalšího vrcholu (nebo i více vrcholů):

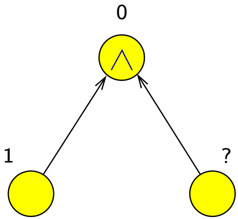
φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Pravdivostní ohodnocení

- Pokud už jsou některým vrcholům pravdivostní hodnoty přiřazeny, může toto přiřazení klást omezení na to, jaké hodnoty je možno přiřadit dalším vrcholům.
- Příklady toho, kdy dříve přiřazené hodnoty vynucují určitou hodnotu u dalšího vrcholu (nebo i více vrcholů):

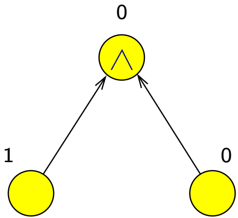
φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Pravdivostní ohodnocení

- Pokud už jsou některým vrcholům pravdivostní hodnoty přiřazeny, může toto přiřazení klást omezení na to, jaké hodnoty je možno přiřadit dalším vrcholům.
- Příklady toho, kdy dříve přiřazené hodnoty vynucují určitou hodnotu u dalšího vrcholu (nebo i více vrcholů):

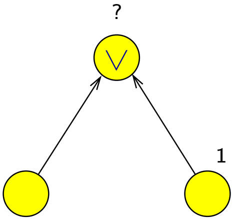
φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Pravdivostní ohodnocení

- Pokud už jsou některým vrcholům pravdivostní hodnoty přiřazeny, může toto přiřazení klást omezení na to, jaké hodnoty je možno přiřadit dalším vrcholům.
- Příklady toho, kdy dříve přiřazené hodnoty vynucují určitou hodnotu u dalšího vrcholu (nebo i více vrcholů):

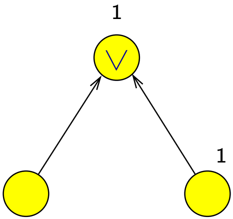
φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



Pravdivostní ohodnocení

- Pokud už jsou některým vrcholům pravdivostní hodnoty přiřazeny, může toto přiřazení klást omezení na to, jaké hodnoty je možno přiřadit dalším vrcholům.
- Příklady toho, kdy dříve přiřazené hodnoty vynucují určitou hodnotu u dalšího vrcholu (nebo i více vrcholů):

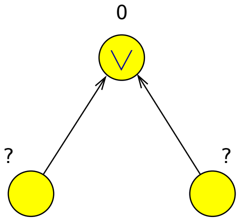
φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



Pravdivostní ohodnocení

- Pokud už jsou některým vrcholům pravdivostní hodnoty přiřazeny, může toto přiřazení klást omezení na to, jaké hodnoty je možno přiřadit dalším vrcholům.
- Příklady toho, kdy dříve přiřazené hodnoty vynucují určitou hodnotu u dalšího vrcholu (nebo i více vrcholů):

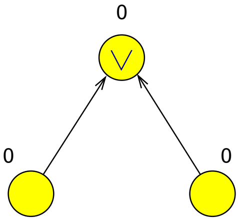
φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



Pravdivostní ohodnocení

- Pokud už jsou některým vrcholům pravdivostní hodnoty přiřazeny, může toto přiřazení klást omezení na to, jaké hodnoty je možno přiřadit dalším vrcholům.
- Příklady toho, kdy dříve přiřazené hodnoty vynucují určitou hodnotu u dalšího vrcholu (nebo i více vrcholů):

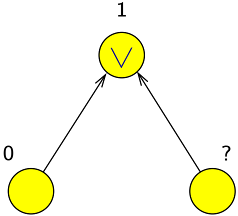
φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



Pravdivostní ohodnocení

- Pokud už jsou některým vrcholům pravdivostní hodnoty přiřazeny, může toto přiřazení klást omezení na to, jaké hodnoty je možno přiřadit dalším vrcholům.
- Příklady toho, kdy dříve přiřazené hodnoty vynucují určitou hodnotu u dalšího vrcholu (nebo i více vrcholů):

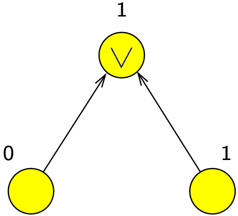
φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



Pravdivostní ohodnocení

- Pokud už jsou některým vrcholům pravdivostní hodnoty přiřazeny, může toto přiřazení klást omezení na to, jaké hodnoty je možno přiřadit dalším vrcholům.
- Příklady toho, kdy dříve přiřazené hodnoty vynucují určitou hodnotu u dalšího vrcholu (nebo i více vrcholů):

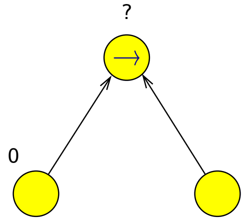
φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



Pravdivostní ohodnocení

- Pokud už jsou některým vrcholům pravdivostní hodnoty přiřazeny, může toto přiřazení klást omezení na to, jaké hodnoty je možno přiřadit dalším vrcholům.
- Příklady toho, kdy dříve přiřazené hodnoty vynucují určitou hodnotu u dalšího vrcholu (nebo i více vrcholů):

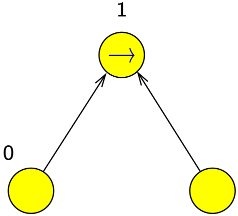
φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1



Pravdivostní ohodnocení

- Pokud už jsou některým vrcholům pravdivostní hodnoty přiřazeny, může toto přiřazení klást omezení na to, jaké hodnoty je možno přiřadit dalším vrcholům.
- Příklady toho, kdy dříve přiřazené hodnoty vynucují určitou hodnotu u dalšího vrcholu (nebo i více vrcholů):

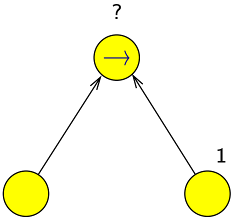
φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1



Pravdivostní ohodnocení

- Pokud už jsou některým vrcholům pravdivostní hodnoty přiřazeny, může toto přiřazení klást omezení na to, jaké hodnoty je možno přiřadit dalším vrcholům.
- Příklady toho, kdy dříve přiřazené hodnoty vynucují určitou hodnotu u dalšího vrcholu (nebo i více vrcholů):

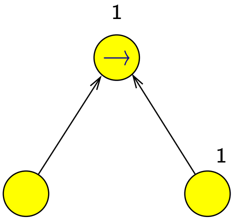
φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1



Pravdivostní ohodnocení

- Pokud už jsou některým vrcholům pravdivostní hodnoty přiřazeny, může toto přiřazení klást omezení na to, jaké hodnoty je možno přiřadit dalším vrcholům.
- Příklady toho, kdy dříve přiřazené hodnoty vynucují určitou hodnotu u dalšího vrcholu (nebo i více vrcholů):

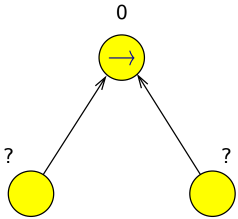
φ	ψ	$\varphi \to \psi$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1



Pravdivostní ohodnocení

- Pokud už jsou některým vrcholům pravdivostní hodnoty přiřazeny, může toto přiřazení klást omezení na to, jaké hodnoty je možno přiřadit dalším vrcholům.
- Příklady toho, kdy dříve přiřazené hodnoty vynucují určitou hodnotu u dalšího vrcholu (nebo i více vrcholů):

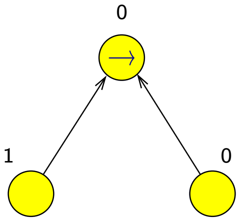
φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1



Pravdivostní ohodnocení

- Pokud už jsou některým vrcholům pravdivostní hodnoty přiřazeny, může toto přiřazení klást omezení na to, jaké hodnoty je možno přiřadit dalším vrcholům.
- Příklady toho, kdy dříve přiřazené hodnoty vynucují určitou hodnotu u dalšího vrcholu (nebo i více vrcholů):

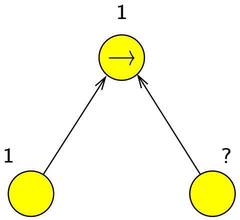
φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1



Pravdivostní ohodnocení

- Pokud už jsou některým vrcholům pravdivostní hodnoty přiřazeny, může toto přiřazení klást omezení na to, jaké hodnoty je možno přiřadit dalším vrcholům.
- Příklady toho, kdy dříve přiřazené hodnoty vynucují určitou hodnotu u dalšího vrcholu (nebo i více vrcholů):

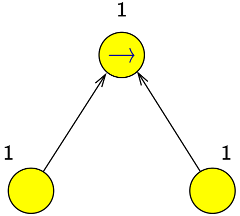
φ	ψ	$\varphi \to \psi$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1



Pravdivostní ohodnocení

- Pokud už jsou některým vrcholům pravdivostní hodnoty přiřazeny, může toto přiřazení klást omezení na to, jaké hodnoty je možno přiřadit dalším vrcholům.
- Příklady toho, kdy dříve přiřazené hodnoty vynucují určitou hodnotu u dalšího vrcholu (nebo i více vrcholů):

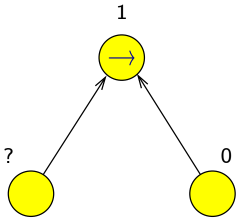
φ	ψ	$\varphi \to \psi$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1



Pravdivostní ohodnocení

- Pokud už jsou některým vrcholům pravdivostní hodnoty přiřazeny, může toto přiřazení klást omezení na to, jaké hodnoty je možno přiřadit dalším vrcholům.
- Příklady toho, kdy dříve přiřazené hodnoty vynucují určitou hodnotu u dalšího vrcholu (nebo i více vrcholů):

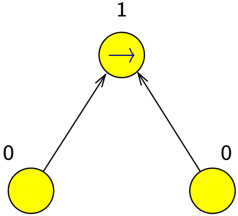
φ	ψ	$\varphi \to \psi$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1



Pravdivostní ohodnocení

- Pokud už jsou některým vrcholům pravdivostní hodnoty přiřazeny, může toto přiřazení klást omezení na to, jaké hodnoty je možno přiřadit dalším vrcholům.
- Příklady toho, kdy dříve přiřazené hodnoty vynucují určitou hodnotu u dalšího vrcholu (nebo i více vrcholů):

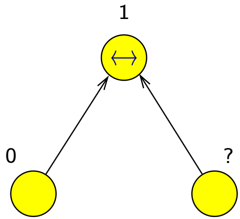
φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1



Pravdivostní ohodnocení

- Pokud už jsou některým vrcholům pravdivostní hodnoty přiřazeny, může toto přiřazení klást omezení na to, jaké hodnoty je možno přiřadit dalším vrcholům.
- Příklady toho, kdy dříve přiřazené hodnoty vynucují určitou hodnotu u dalšího vrcholu (nebo i více vrcholů):

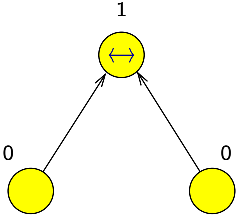
φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Pravdivostní ohodnocení

- Pokud už jsou některým vrcholům pravdivostní hodnoty přiřazeny, může toto přiřazení klást omezení na to, jaké hodnoty je možno přiřadit dalším vrcholům.
- Příklady toho, kdy dříve přiřazené hodnoty vynucují určitou hodnotu u dalšího vrcholu (nebo i více vrcholů):

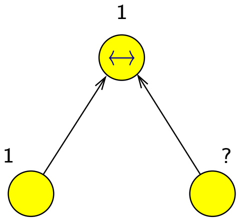
φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Pravdivostní ohodnocení

- Pokud už jsou některým vrcholům pravdivostní hodnoty přiřazeny, může toto přiřazení klást omezení na to, jaké hodnoty je možno přiřadit dalším vrcholům.
- Příklady toho, kdy dříve přiřazené hodnoty vynucují určitou hodnotu u dalšího vrcholu (nebo i více vrcholů):

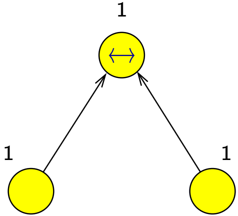
φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Pravdivostní ohodnocení

- Pokud už jsou některým vrcholům pravdivostní hodnoty přiřazeny, může toto přiřazení klást omezení na to, jaké hodnoty je možno přiřadit dalším vrcholům.
- Příklady toho, kdy dříve přiřazené hodnoty vynucují určitou hodnotu u dalšího vrcholu (nebo i více vrcholů):

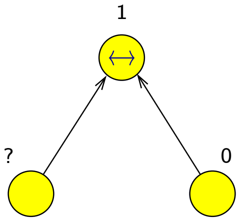
φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Pravdivostní ohodnocení

- Pokud už jsou některým vrcholům pravdivostní hodnoty přiřazeny, může toto přiřazení klást omezení na to, jaké hodnoty je možno přiřadit dalším vrcholům.
- Příklady toho, kdy dříve přiřazené hodnoty vynucují určitou hodnotu u dalšího vrcholu (nebo i více vrcholů):

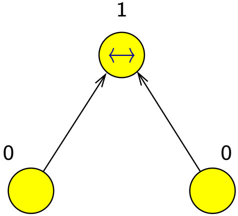
φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Pravdivostní ohodnocení

- Pokud už jsou některým vrcholům pravdivostní hodnoty přiřazeny, může toto přiřazení klást omezení na to, jaké hodnoty je možno přiřadit dalším vrcholům.
- Příklady toho, kdy dříve přiřazené hodnoty vynucují určitou hodnotu u dalšího vrcholu (nebo i více vrcholů):

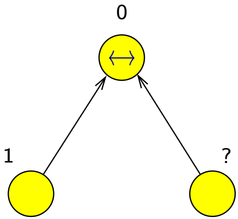
φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Pravdivostní ohodnocení

- Pokud už jsou některým vrcholům pravdivostní hodnoty přiřazeny, může toto přiřazení klást omezení na to, jaké hodnoty je možno přiřadit dalším vrcholům.
- Příklady toho, kdy dříve přiřazené hodnoty vynucují určitou hodnotu u dalšího vrcholu (nebo i více vrcholů):

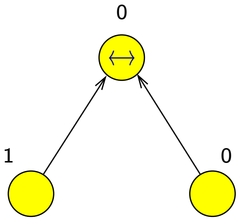
φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Pravdivostní ohodnocení

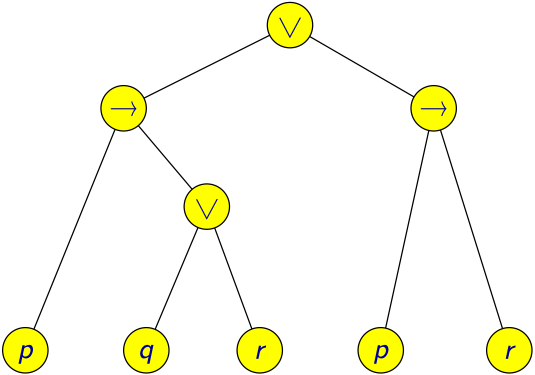
- Pokud už jsou některým vrcholům pravdivostní hodnoty přiřazeny, může toto přiřazení klást omezení na to, jaké hodnoty je možno přiřadit dalším vrcholům.
- Příklady toho, kdy dříve přiřazené hodnoty vynucují určitou hodnotu u dalšího vrcholu (nebo i více vrcholů):

φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



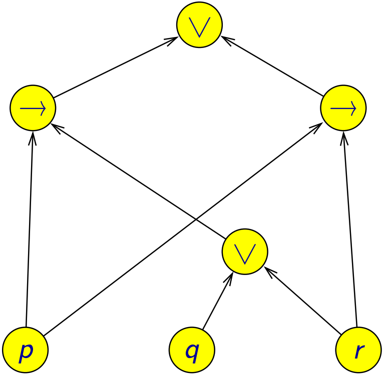
Je daná formule tautologií?

Příklad: $\varphi_1 := (p \rightarrow (q \vee r)) \vee (p \rightarrow r)$



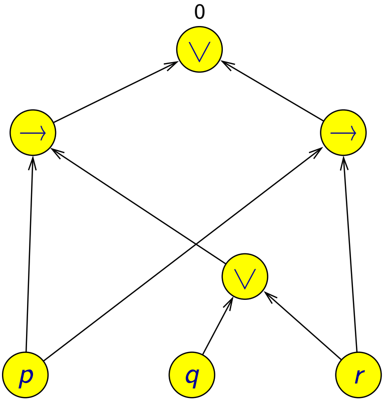
Je daná formule tautologií?

Příklad: $\varphi_1 := (p \to (q \vee r)) \vee (p \to r)$



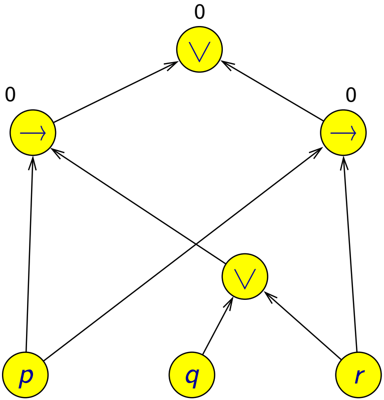
Je daná formule tautologií?

Příklad: $\varphi_1 := (p \rightarrow (q \vee r)) \vee (p \rightarrow r)$



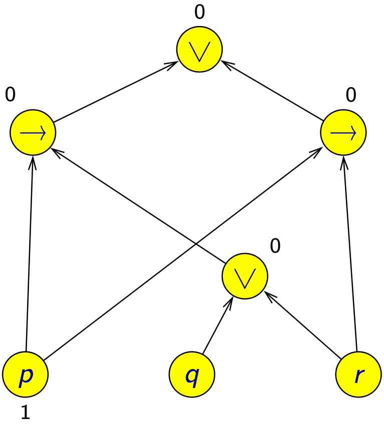
Je daná formule tautologií?

Příklad: $\varphi_1 := (p \rightarrow (q \vee r)) \vee (p \rightarrow r)$



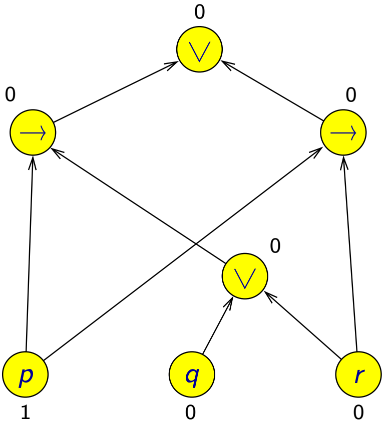
Je daná formule tautologií?

Příklad: $\varphi_1 := (p \rightarrow (q \vee r)) \vee (p \rightarrow r)$



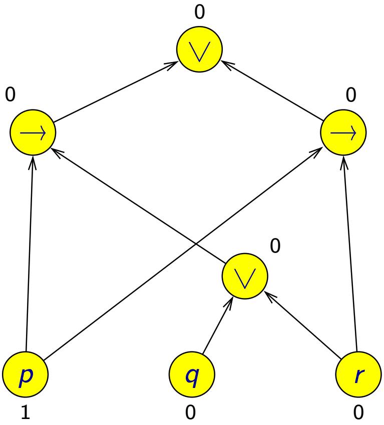
Je daná formule tautologií?

Příklad: $\varphi_1 := (p \to (q \vee r)) \vee (p \to r)$



Je daná formule tautologií?

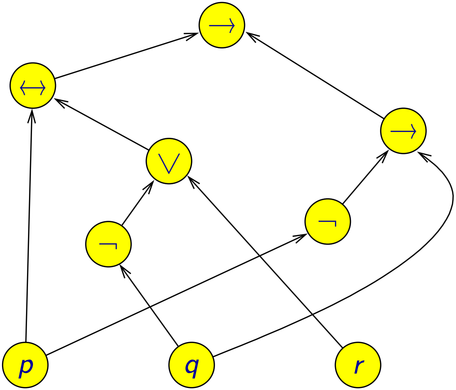
Příklad: $\varphi_1 := (p \rightarrow (q \vee r)) \vee (p \rightarrow r)$



Formule φ_1 není tautologie — při ohodnocení v, kde $v(p) = 1$, $v(q) = 0$, $v(r) = 0$, je nepravdivá.

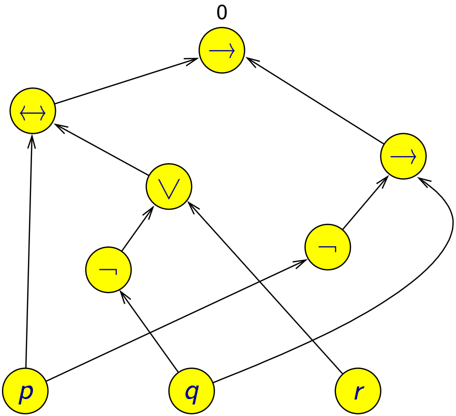
Je daná formule tautologií?

Příklad: $\varphi_2 \;:=\; (p \leftrightarrow (\neg q \vee r)) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$

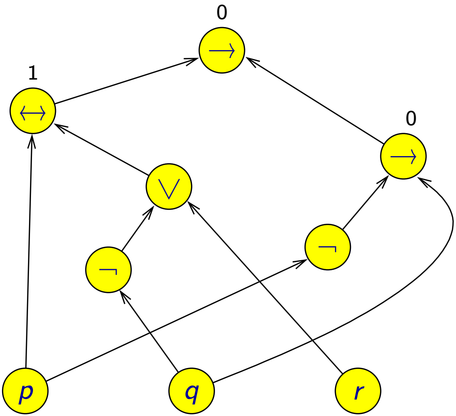


Je daná formule tautologií?

Příklad: $\varphi_2 := (p \leftrightarrow (\neg q \vee r)) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$

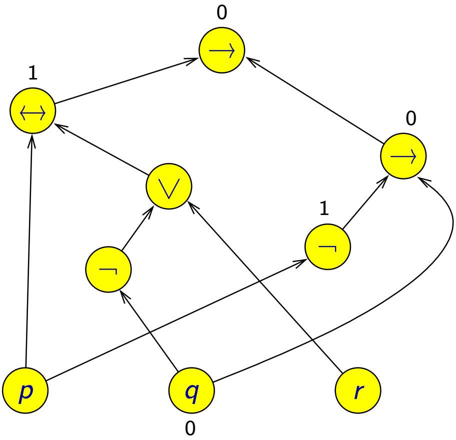


Příklad: $\varphi_2 \;:=\; (p \leftrightarrow (\neg q \vee r)) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$



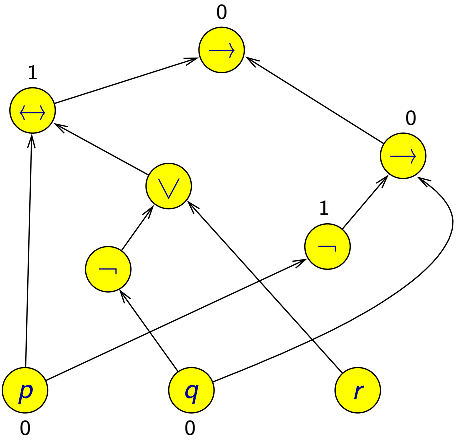
Je daná formule tautologií?

Příklad: $\varphi_2 := (p \leftrightarrow (\neg q \vee r)) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$



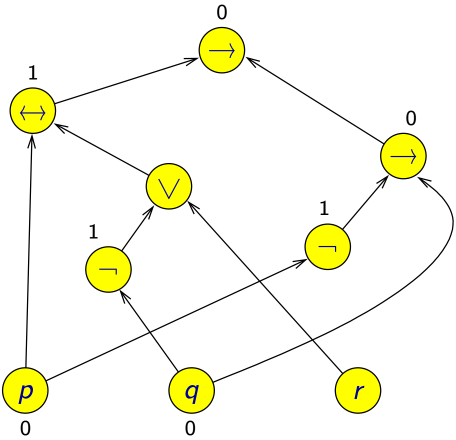
Je daná formule tautologií?

Příklad: $\varphi_2 \; := \; (p \leftrightarrow (\neg q \vee r)) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$



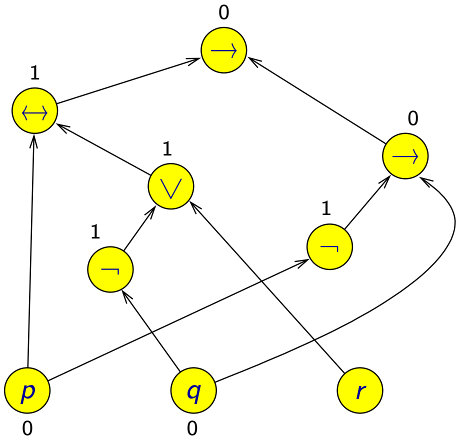
Je daná formule tautologií?

Příklad: $\varphi_2 := (p \leftrightarrow (\neg q \vee r)) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$



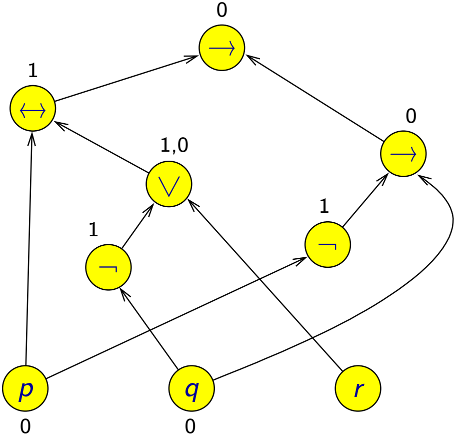
Je daná formule tautologií?

Příklad: $\varphi_2 \;:=\; (p \leftrightarrow (\neg q \vee r)) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$



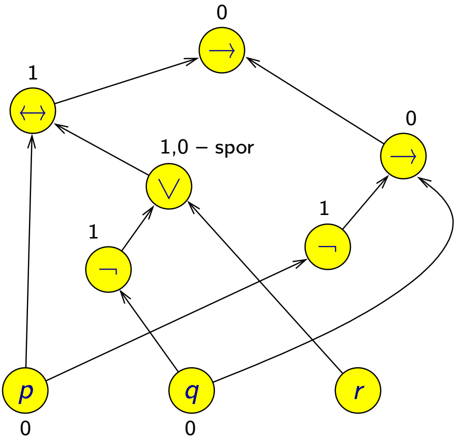
Je daná formule tautologií?

Příklad: $\varphi_2 \;:=\; (p \leftrightarrow (\neg q \vee r)) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$



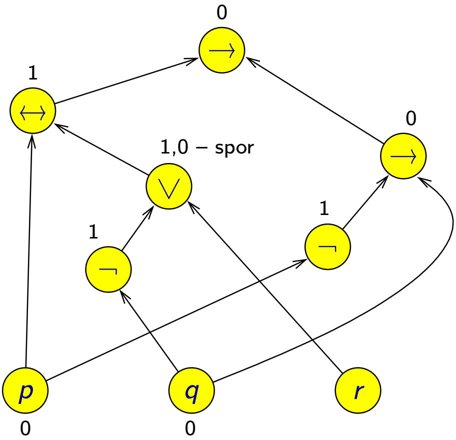
Je daná formule tautologií?

Příklad: $\varphi_2 \;:=\; (p \leftrightarrow (\neg q \vee r)) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$



Je daná formule tautologií?

Příklad: $\varphi_2 := (p \leftrightarrow (\neg q \vee r)) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$



Formule φ_2 je tautologie.

Sémantický spor

Sémantický spor — případ, kdy zjistíme, že při ohodnocení s požadovanou vlastností, které hledáme (např. ohodnocení, kde je daná formule nepravdivá), by musela být nějaká formule současně pravdivá i nepravdivá.

- Žádné takové pravdivostní ohodnocení, kde by byla nějaká formule současně pravdivá i nepravdivá, nemůže existovat.
- Tímto způsobem můžeme tedy například zdůvodnit, že daná formule je tautologií (a tedy vždy pravdivá), protože nalezením sémantického sporu ukážeme, že nemůže existovat žádné ohodnocení, při kterém by byla nepravdivá.

Je daná formule tautologií?

Postup z předchozího příkladu je také možné popsat následující posloupností argumentů:

1.	Předpokládejme, že $(p \leftrightarrow (\neg q \vee r)) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$ není pravda. Potom:	
2.	$p \leftrightarrow (\neg q \vee r)$ je pravda	- plyne z 1.
3.	$\neg p \rightarrow q$ není pravda	- plyne z 1.
4.	$\neg p$ je pravda	- plyne z 3.
5.	q není pravda	- plyne z 3.
6.	p není pravda	- plyne z 4.
7.	$\neg q$ je pravda	- plyne z 5.
8.	$\neg q \vee r$ je pravda	- plyne z 7.
9.	$\neg q \vee r$ není pravda	- plyne z 2. a 6.
10.	Není možné, aby $(p \leftrightarrow (\neg q \vee r)) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$ nebyla pravda, protože v takovém případě by $\neg q \vee r$ musela být současně pravda i nepravda (viz 8. a 9.).	

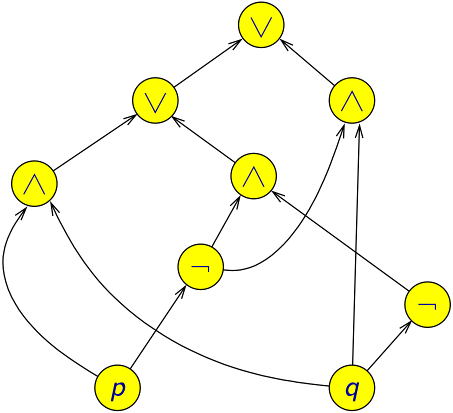
Poznámka: Všimněme si, že v tomto zdůvodnění se vůbec nemluví o grafu reprezentujícím danou formuli, ale jen o pravdivosti a nepravdivosti jejích různých podformulí.

Je daná formule tautologií?

- Zdaleka ne vždy to vychází tak, že hodnoty přiřazené jednotlivým vrcholům jsou jednoznačně určeny dříve přiřazenými hodnotami
- Pokud se dojde do situace, kdy nelze žádnému dalšímu vrcholu přiřadit hodnotu, je třeba zkusit více možností.
- Zvolí se nějaký vrchol a nějaká hodnota, která se mu přiřadí, a odvodí se další hodnoty, které musí být přiřazeny vrcholu v tomto případě.
- Pokud se nenajde hledané ohodnocení, je třeba se vrátit, přiřadit danému vrcholu jinou hodnotu, a vyzkoušet tuto možnost.

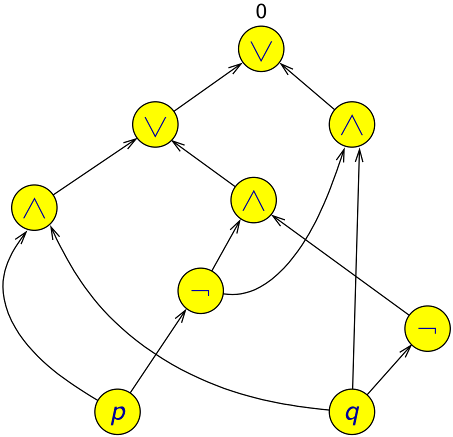
Je daná formule tautologií?

Příklad: $\varphi_3 := ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \vee (\neg p \wedge q)$



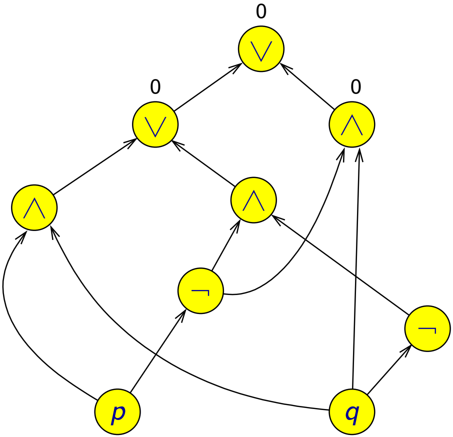
Je daná formule tautologií?

Příklad: $\varphi_3 := ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \vee (\neg p \wedge q)$



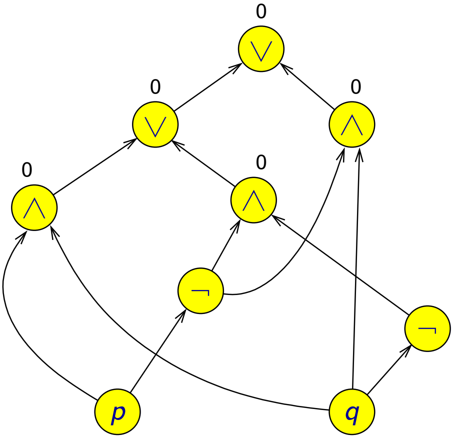
Je daná formule tautologií?

Příklad: $\varphi_3 := ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \vee (\neg p \wedge q)$



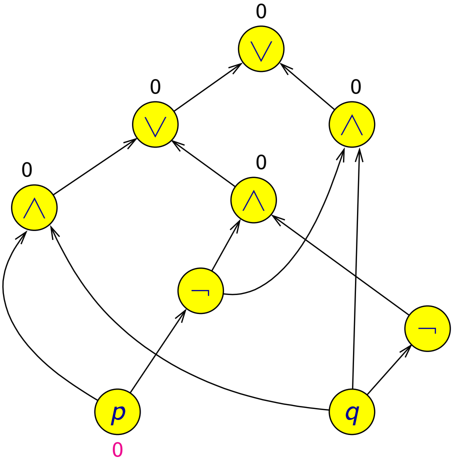
Je daná formule tautologií?

Příklad: $\varphi_3 \;:=\; ((p \land q) \lor (\neg p \land \neg q)) \lor (\neg p \land q)$



Je daná formule tautologií?

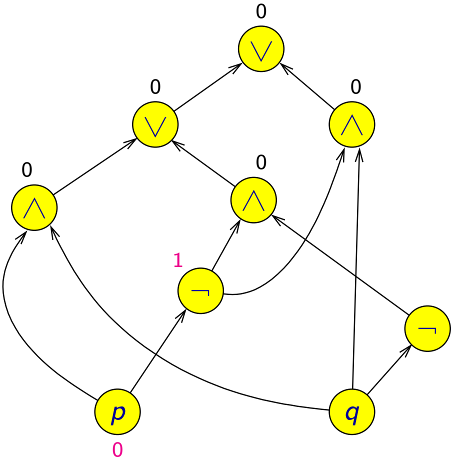
Příklad: $\varphi_3 := ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \vee (\neg p \wedge q)$



Zkusíme vrcholu p přiřadit hodnotu 0.

Je daná formule tautologií?

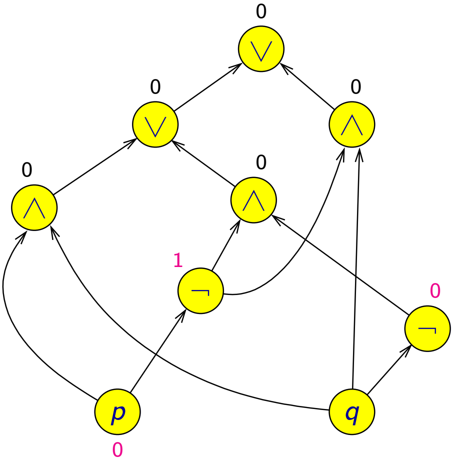
Příklad: $\varphi_3 := ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \vee (\neg p \wedge q)$



Zkusíme vrcholu p přiřadit hodnotu 0.

Je daná formule tautologií?

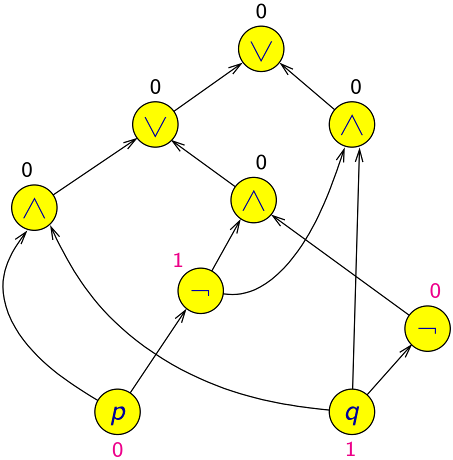
Příklad: $\varphi_3 := ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \vee (\neg p \wedge q)$



Zkusíme vrcholu p přiřadit hodnotu 0.

Je daná formule tautologií?

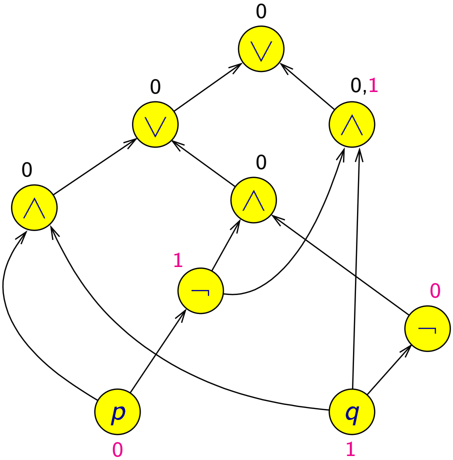
Příklad: $\varphi_3 := ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \vee (\neg p \wedge q)$



Zkusíme vrcholu p přiřadit hodnotu 0.

Je daná formule tautologií?

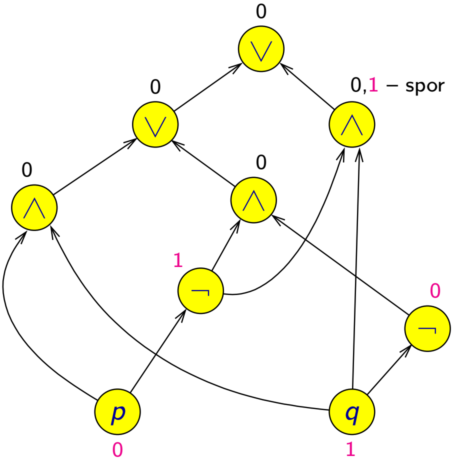
Příklad: $\varphi_3 := ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \vee (\neg p \wedge q)$



Zkusíme vrcholu p přiřadit hodnotu 0.

Je daná formule tautologií?

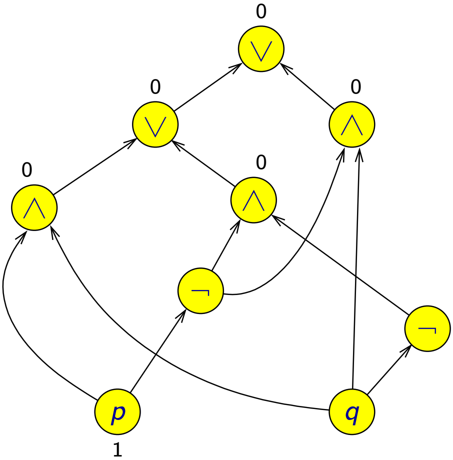
Příklad: $\varphi_3 \ := \ ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \vee (\neg p \wedge q)$



Zkusíme vrcholu p přiřadit hodnotu 0.

Je daná formule tautologií?

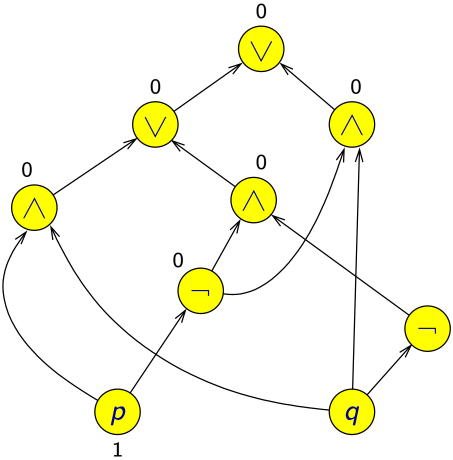
Příklad: $\varphi_3 \ := \ ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \vee (\neg p \wedge q)$



Vrchol p tedy musí mít hodnotu 1.

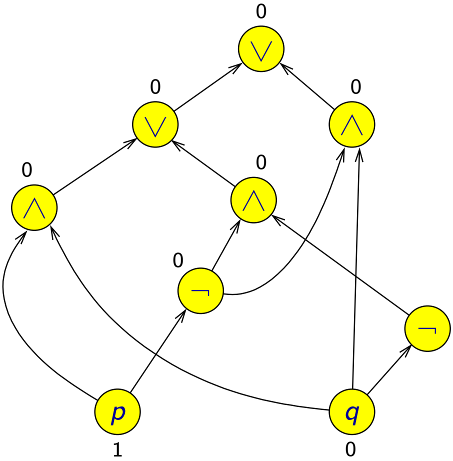
Je daná formule tautologií?

Příklad: $\varphi_3 \ := \ ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \vee (\neg p \wedge q)$



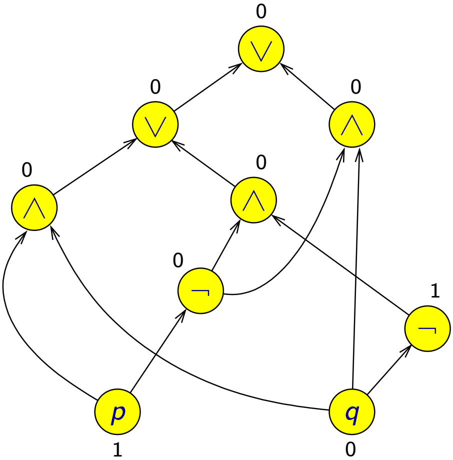
Je daná formule tautologií?

Příklad: $\varphi_3 := ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \vee (\neg p \wedge q)$



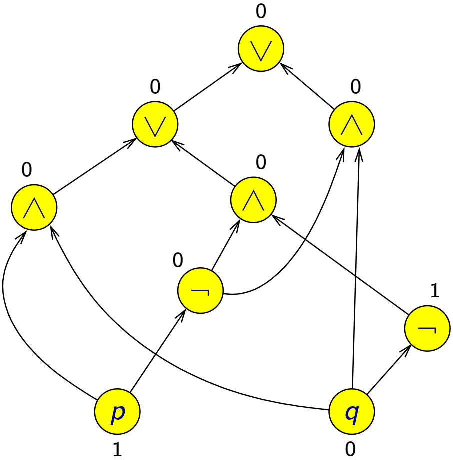
Je daná formule tautologií?

Příklad: $\varphi_3 := ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \vee (\neg p \wedge q)$



Je daná formule tautologií?

Příklad: $\varphi_3 := ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \vee (\neg p \wedge q)$



Formule φ_3 není tautologie — není pravdivá při ohodnocení v, kde $v(p) = 1$, $v(q) = 0$.

Ekvivalence formulí

Definice

Formule φ a ψ jsou **logicky ekvivalentní**, jestliže pro každé pravdivostní ohodnocení v platí, že φ a ψ mají při ohodnocení v stejnou pravdivostní hodnotu, tj.

$$v \models \varphi \qquad \text{právě tehdy, když} \qquad v \models \psi.$$

To, že formule φ a ψ jsou logicky ekvivalentní, se označuje zápisem

$$\varphi \Leftrightarrow \psi.$$

Formule φ a ψ jsou logicky ekvivalentní právě tehdy, když $\varphi \leftrightarrow \psi$ je tautologie.

Ekvivalence formulí

Příklad: $\neg(p \rightarrow q) \;\Leftrightarrow\; p \wedge \neg q$

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg(p \rightarrow q)$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$
0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0

Ekvivalence formulí

Pro zdůvodnění toho, že formule φ a ψ **nejsou** ekvivalentní, stačí najít jedno ohodnocení v takové, že buď:

- $v \models \varphi$ a $v \not\models \psi$, nebo
- $v \not\models \varphi$ a $v \models \psi$.

Příklad: $p \vee (q \wedge r)$ není ekvivalentní $(p \vee q) \wedge r$

Ohodnocení v, kde:

- $v(p) = 1$
- $v(q) = 1$
- $v(r) = 0$

Při tomto ohodnocení platí $p \vee (q \wedge r)$, ale neplatí $(p \vee q) \wedge r$.

Některé důležité ekvivalence

– Ekvivalence týkající se negace:

$\neg\neg p \Leftrightarrow p$ — *dvojitá negace*

– Ekvivalence týkající se konjunkce:

$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ — *asociativita*

$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ — *komutativita*

$p \wedge p \Leftrightarrow p$ — *idempotence*

– Ekvivalence týkající se disjunkce:

$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ — *asociativita*

$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ — *komutativita*

$p \vee p \Leftrightarrow p$ — *idempotence*

Některé důležité ekvivalence

– Distributivní zákony pro $\wedge$ a $\vee$:

$$p \wedge (q \vee r) \;\Leftrightarrow\; (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
$$p \vee (q \wedge r) \;\Leftrightarrow\; (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

– De Morganovy zákony:

$$\neg(p \wedge q) \;\Leftrightarrow\; \neg p \vee \neg q$$
$$\neg(p \vee q) \;\Leftrightarrow\; \neg p \wedge \neg q$$

– Ekvivalence týkající se implikace:

$$p \rightarrow q \;\Leftrightarrow\; \neg p \vee q$$
$$\neg(p \rightarrow q) \;\Leftrightarrow\; p \wedge \neg q$$

Některé důležité ekvivalence

– Ekvivalence týkající se spojky $\leftrightarrow$:

$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \;\Leftrightarrow\; p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$	*asociativita*
$p \leftrightarrow q \;\Leftrightarrow\; q \leftrightarrow p$	*komutativita*
$p \leftrightarrow q \;\Leftrightarrow\; (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	
$p \leftrightarrow q \;\Leftrightarrow\; (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$	
$p \leftrightarrow q \;\Leftrightarrow\; (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$	

Ekvivalence formulí

Řekněme, že formule φ a ψ jsou logicky ekvivalentní, tj.

$$\varphi \Leftrightarrow \psi\,.$$

Pokud ve φ a ψ nahradíme jednotlivé atomické výroky libovolnými formulemi (v obou stejně), dostaneme opět ekvivalentní formule.

Příklad: $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

Pro libovolné formule χ_1 a χ_2 proto platí

$$\neg(\chi_1 \vee \chi_2) \Leftrightarrow \neg\chi_1 \wedge \neg\chi_2$$

Ekvivalence formulí

$$\neg(p \vee q) \;\Leftrightarrow\; \neg p \wedge \neg q$$

Náhrada atomických výroků:

- p nahradíme $q \vee \neg(r \rightarrow \neg s)$
- q nahradíme $\neg(q \leftrightarrow p)$

Dostaneme

$$\neg((q \vee \neg(r \rightarrow \neg s)) \vee \neg(q \leftrightarrow p)) \;\Leftrightarrow\; \neg(q \vee \neg(r \rightarrow \neg s)) \wedge \neg\neg(q \leftrightarrow p)$$

Ekvivalence formulí

Řekněme, že φ je formule a ψ nějaká její podformule.

Pokud nyní ve φ nahradíme nějaký výskyt podformule ψ formulí ψ' takovou, že $\psi \Leftrightarrow \psi'$, dostaneme tím z formule φ formuli φ' takovou, že

$$\varphi \Leftrightarrow \varphi'.$$

Příklad: Ve formuli

$$\neg((p \rightarrow q) \vee (\neg(p \rightarrow q) \rightarrow r))$$

nahradíme druhý výskyt podformule $p \rightarrow q$ ekvivalentní formulí $\neg p \vee q$.

Dostaneme

$$\neg((p \rightarrow q) \vee (\neg(\neg p \vee q) \rightarrow r))$$

Ekvivalentní úpravy

Pro libovolné formule φ, ψ a χ platí:

- $\varphi \Leftrightarrow \varphi$.
- Pokud $\varphi \Leftrightarrow \psi$, tak $\psi \Leftrightarrow \varphi$.
- Pokud $\varphi \Leftrightarrow \psi$ a $\psi \Leftrightarrow \chi$, tak $\varphi \Leftrightarrow \chi$.

Při zdůvodňování toho, že dané formule jsou ekvivalentní, můžeme postupovat po menších krocích:

Pokud například platí $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$, $\varphi_2 \Leftrightarrow \varphi_3$, $\varphi_3 \Leftrightarrow \varphi_4$ a $\varphi_4 \Leftrightarrow \varphi_5$, můžeme z toho vyvodit, že platí

$$\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_5 \,.$$

Tento postup můžeme stručněji zapsat

$$\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2 \Leftrightarrow \varphi_3 \Leftrightarrow \varphi_4 \Leftrightarrow \varphi_5$$

Ekvivalentní úpravy

Příklad: Zdůvodnění toho, že platí

$$(p \wedge q) \rightarrow r \;\Leftrightarrow\; p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

$$\begin{aligned}
(p \wedge q) \rightarrow r &\Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee r \\
&\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee r \\
&\Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee r) \\
&\Leftrightarrow \neg p \vee (q \rightarrow r) \\
&\Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)
\end{aligned}$$

Ekvivalentní úpravy

Každá formule se dá převést na ekvivalentní formuli, která obsahuje z logických spojek pouze "$\neg$", "$\wedge$" a "$\vee$".

- Spojku "$\leftrightarrow$" je možno odstranit pomocí libovolné z následujících tří ekvivalencí:
  - $p \leftrightarrow q \;\Leftrightarrow\; (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
  - $p \leftrightarrow q \;\Leftrightarrow\; (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$
  - $p \leftrightarrow q \;\Leftrightarrow\; (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
- Spojku "$\rightarrow$" je možno odstranit pomocí následující ekvivalence:
  - $p \rightarrow q \;\Leftrightarrow\; \neg p \vee q$

Příklad:

$$
\begin{aligned}
(\neg q \rightarrow r) \wedge \neg(p \leftrightarrow r) &\Leftrightarrow (\neg\neg q \vee r) \wedge \neg(p \leftrightarrow r) \\
&\Leftrightarrow (\neg\neg q \vee r) \wedge \neg((p \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg r))
\end{aligned}
$$

Ekvivalentní úpravy

Každá formule se dá převést na ekvivalentní formuli, která obsahuje z logických spojek pouze "$\neg$", "$\wedge$" a "$\vee$", a kde jsou navíc negace aplikovány pouze na atomické výroky.

- Můžeme předpokládat, že formule obsahuje pouze "$\neg$", "$\wedge$" a "$\vee$".
- Negace můžeme postupně „zatlačit" k atomickým výrokům použitím následujících tří ekvivalencí:
  - $\neg\neg p \;\Leftrightarrow\; p$
  - $\neg(p \wedge q) \;\Leftrightarrow\; \neg p \vee \neg q$
  - $\neg(p \vee q) \;\Leftrightarrow\; \neg p \wedge \neg q$

Ekvivalentní úpravy

Příklad:

$$
\begin{aligned}
& (\neg\neg q \vee r) \wedge \neg((p \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg r)) \\
& \quad \Leftrightarrow \; (q \vee r) \wedge \neg((p \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg r)) \\
& \quad \Leftrightarrow \; (q \vee r) \wedge (\neg(p \wedge r) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg r)) \\
& \quad \Leftrightarrow \; (q \vee r) \wedge ((\neg p \vee \neg r) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg r)) \\
& \quad \Leftrightarrow \; (q \vee r) \wedge ((\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg\neg p \vee \neg\neg r)) \\
& \quad \Leftrightarrow \; (q \vee r) \wedge ((\neg p \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg\neg r)) \\
& \quad \Leftrightarrow \; (q \vee r) \wedge ((\neg p \vee \neg r) \wedge (p \vee r))
\end{aligned}
$$

Logické konstanty

Pro některé účely se hodí zavést následující dvě speciální formule:

- $\top$ — formule, která je vždy pravdivá
- $\bot$ — formule, která je vždy nepravdivá

Pro každé pravdivostní ohodnocení v tedy platí:

- $v \models \top$ ($\top$ má tedy vždy pravdivostní hodnotu 1)
- $v \not\models \bot$ ($\bot$ má tedy vždy pravdivostní hodnotu 0)

Logické konstanty

Symboly $\top$ a $\bot$ je možné chápat jako „zkratky“:

- $\top$ zastupuje libovolnou tautologii (např. $p \rightarrow p$)
- $\bot$ zastupuje libovolnou kontradikci (např. $p \wedge \neg p$)

Alternativou by bylo rozšířit definici syntaxe a sémantiky výrokové logiky o příslušné položky.

Na $\top$ a $\bot$ se lze dívat jako na logické spojky s aritou 0.

Logické konstanty

Příklady ekvivalencí, které platí pro $\top$ a $\bot$ (a pro libovolné p):

$$\begin{array}{rcl} \top & \Leftrightarrow & p \vee \neg p \\ \neg\top & \Leftrightarrow & \bot \\ p \wedge \top & \Leftrightarrow & p \\ p \vee \top & \Leftrightarrow & \top \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} \bot & \Leftrightarrow & p \wedge \neg p \\ \neg\bot & \Leftrightarrow & \top \\ p \vee \bot & \Leftrightarrow & p \\ p \wedge \bot & \Leftrightarrow & \bot \end{array}$$

Ekvivalence formulí

Ekvivalentní formule **nemusí** nutně obsahovat stejné atomické výroky.

Příklad: $(q \rightarrow \neg\neg q) \wedge \neg p \;\Leftrightarrow\; p \rightarrow (r \wedge \neg r)$

$$
\begin{aligned}
(q \rightarrow \neg\neg q) \wedge \neg p &\Leftrightarrow (q \rightarrow q) \wedge \neg p \\
&\Leftrightarrow \top \wedge \neg p \\
&\Leftrightarrow \neg p \\
&\Leftrightarrow \neg p \vee \bot \\
&\Leftrightarrow p \rightarrow \bot \\
&\Leftrightarrow p \rightarrow (r \wedge \neg r)
\end{aligned}
$$

Například také libovolné dvě tautologie jsou spolu ekvivalentní.

Konjunkce a disjunkce více formulí

Díky asociativitě konjunkce platí například:

$$p \wedge ((q \wedge r) \wedge (s \wedge t)) \;\Leftrightarrow\; (p \wedge q) \wedge ((r \wedge s) \wedge t)$$

Obě tyto formule jsou také ekvivalentní formulím

- $p \wedge (q \wedge (r \wedge (s \wedge t)))$
- $(((p \wedge q) \wedge r) \wedge s) \wedge t$

Všechny výše uvedené formule jsou pravdivé právě tehdy, když jsou pravdivé všechny výroky p, q, r, s a t.

Konvence: Díky asociativitě konjunkce je možno vypustit závorky a psát

$$p \wedge q \wedge r \wedge s \wedge t$$

Konjunkce a disjunkce více formulí

Protože je konjunkce nejen asociativní, ale i komutativní, nezáleží na pořadí členů v takové komplikovanější konjunkci, např.:

$$r \wedge t \wedge q \wedge s \wedge p \quad \Leftrightarrow \quad p \wedge q \wedge r \wedge s \wedge t$$

Díky idempotenci není podstatné, kolikrát se v dané konjunkci který člen vyskytuje, např.:

$$p \wedge q \wedge p \quad \Leftrightarrow \quad q \wedge p \wedge q \wedge q$$

Konjunkce a disjunkce více formulí

Totéž, co platí pro konjunkci, platí i pro disjunkci, např.:

$$(p \vee q) \vee (r \vee q) \quad \Leftrightarrow \quad q \vee (p \vee (r \vee (r \vee r)))$$

Konvence: Místo $(p \vee q) \vee (r \vee (s \vee t))$ lze psát

$$p \vee q \vee r \vee s \vee t$$

Toto vše platí nejen pro atomické výroky, ale pro libovolné formule, např.:

- Místo $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge (\varphi_3 \wedge (\varphi_4 \wedge \varphi_5))$ lze psát

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_4 \wedge \varphi_5$$

Konjunkce a disjunkce více formulí

Konjunkcí n formulí $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, kde $n \geq 0$, budeme rozumět formuli

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$$

Speciálně:

- Pro $n = 0$ bude touto konjunkcí formule $\top$.
- Pro $n = 1$ bude touto konjunkcí formule φ_1.

Disjunkcí n formulí $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, kde $n \geq 0$, budeme rozumět formuli

$$\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \cdots \vee \varphi_n$$

Speciálně:

- Pro $n = 0$ bude touto disjunkcí formule $\bot$.
- Pro $n = 1$ bude touto disjunkcí formule φ_1.

Konjunkce a disjunkce více formulí

Konjunkce $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$:

- Celá formule je pravdivá právě tehdy, když všechny formule φ_1, φ_2, ..., φ_n jsou pravdivé.
- Pokud je některá formule φ_i ekvivalentní $\bot$, je celá formule ekvivalentní $\bot$.
- Pokud je některá formule φ_i ekvivalentní negaci nějaké formule φ_j (tj. $\varphi_i \Leftrightarrow \neg\varphi_j$), pak celá formule je ekvivalentní $\bot$.
- Pokud je některá formule φ_i ekvivalentní $\top$, je možné formuli φ_i z celé formule vypustit.

Disjunkce $\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \cdots \vee \varphi_n$:

- Celá formule je pravdivá právě tehdy, když alespoň jedna z formulí $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ je pravdivá.
- Pokud je některá formule φ_i ekvivalentní $\top$, je celá formule ekvivalentní $\top$.
- Pokud je některá formule φ_i ekvivalentní negaci nějaké formule φ_j (tj. $\varphi_i \Leftrightarrow \neg\varphi_j$), pak celá formule je ekvivalentní $\top$.
- Pokud je některá formule φ_i ekvivalentní $\perp$, je možné formuli φ_i z celé formule vypustit.

Normální formy formulí

- **Literál** — atomický výrok nebo jeho negace, např.

$$p \qquad \neg q \qquad \neg r$$

- **Elementární konjunkce** — konjunkce jednoho nebo více literálů, např.

$$(p \wedge \neg q) \qquad (r) \qquad (q \wedge \neg r \wedge p)$$

- **Elementární disjunkce** (**klauzule**) — disjunkce jednoho nebo více literálů, např.

$$(p \vee \neg q) \qquad (r) \qquad (q \vee \neg r \vee p)$$

Normální formy formulí

Příklad:

- Elementární konjunkce

$$(p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s \wedge \neg t)$$

je **pravdivá** právě v těch pravdivostních ohodnoceních v, kde

$$v(p) = 1 \qquad v(q) = 0 \qquad v(r) = 1 \qquad v(s) = 0 \qquad v(t) = 0$$

- Elementární disjunkce

$$(p \vee \neg q \vee r \vee \neg s \vee \neg t)$$

je **nepravdivá** právě v těch pravdivostních ohodnoceních v, kde

$$v(p) = 0 \qquad v(q) = 1 \qquad v(r) = 0 \qquad v(s) = 1 \qquad v(t) = 1$$

Normální formy formulí

- **Disjunktivní normální forma** (**DNF**) — disjunkce nula nebo více elementárních konjunkcí, např.

$$(p \wedge \neg q) \;\vee\; (\neg r) \;\vee\; (\neg r \wedge \neg p \wedge \neg q)$$

- **Konjunktivní normální forma** (**KNF**) — konjunkce nula nebo více elementárních disjunkcí (klauzulí), např.

$$(p \vee \neg q) \;\wedge\; (\neg r) \;\wedge\; (\neg r \vee \neg p \vee \neg q)$$

Poznámka: Formule $\perp$ je tedy speciálním případem formule v DNF a formule $\top$ speciálním případem formule v KNF.

Normální formy formulí

Formule v KNF je **tautologie** právě tehdy, když pro každou elementární disjunkci v této formuli platí, že existuje nějaký atomický výrok p takový, že se v dané elementární disjunkci zároveň vyskytují literály p i $\neg p$.

Příklad: $(p \vee q \vee \neg r \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg s \vee s) \wedge (t \vee \neg r \vee s \vee \neg t \vee q)$

Formule v DNF je **kontradikce** právě tehdy, když pro každou elementární konjunkci v této formuli platí, že existuje nějaký atomický výrok p takový, že se v dané elementární konjunkci zároveň vyskytují literály p i $\neg p$.

Příklad: $(p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg s \wedge s) \vee (t \wedge \neg r \wedge s \wedge \neg t \vee q)$

Normální formy formulí

Převod formule do DNF a do KNF:

- Můžeme předpokládat, že formule obsahuje pouze atomické výroky, spojky "$\neg$" aplikované na atomické výroky a spojky "$\wedge$" a "$\vee$".
- Požadovaný tvar formule můžeme dosáhnout pomocí následujících ekvivalencí:
  - $p \wedge (q \vee r) \;\Leftrightarrow\; (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ — při převodu do DNF
  - $p \vee (q \wedge r) \;\Leftrightarrow\; (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ — při převodu do KNF

Normální formy formulí

Příklad: Převod formule $q \wedge ((\neg p \vee \neg r) \wedge (p \vee r))$ do DNF:

$$
\begin{aligned}
& q \wedge ((\neg p \vee \neg r) \wedge (p \vee r)) \\
\Leftrightarrow\ & (q \wedge (\neg p \vee \neg r)) \wedge (p \vee r) \\
\Leftrightarrow\ & ((q \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg r)) \wedge (p \vee r) \\
\Leftrightarrow\ & (((q \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg r)) \wedge p) \ \vee\ (((q \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg r)) \wedge r) \\
\Leftrightarrow\ & (((q \wedge \neg p) \wedge p) \vee ((q \wedge \neg r) \wedge p)) \ \vee\ (((q \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg r)) \wedge r) \\
\Leftrightarrow\ & (q \wedge \neg p \wedge p) \ \vee\ (q \wedge \neg r \wedge p) \ \vee\ (((q \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg r)) \wedge r) \\
\Leftrightarrow\ & (q \wedge \bot) \ \vee\ (q \wedge \neg r \wedge p) \ \vee\ (((q \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg r)) \wedge r) \\
\Leftrightarrow\ & \bot \ \vee\ (q \wedge \neg r \wedge p) \ \vee\ (((q \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg r)) \wedge r) \\
\Leftrightarrow\ & (q \wedge \neg r \wedge p) \ \vee\ (((q \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg r)) \wedge r) \\
\Leftrightarrow\ & (p \wedge q \wedge \neg r) \ \vee\ (((q \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg r)) \wedge r) \\
\Leftrightarrow\ & \quad \ldots
\end{aligned}
$$

Normální formy formulí

$$
\begin{aligned}
& \dots \\
\Leftrightarrow\ & (p \wedge q \wedge \neg r) \ \vee\ (((q \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg r)) \wedge r) \\
\Leftrightarrow\ & (p \wedge q \wedge \neg r) \ \vee\ (((q \wedge \neg p) \wedge r) \ \vee\ ((q \wedge \neg r) \wedge r)) \\
\Leftrightarrow\ & (p \wedge q \wedge \neg r) \ \vee\ (q \wedge \neg p \wedge r) \ \vee\ (q \wedge \neg r \wedge r) \\
\Leftrightarrow\ & (p \wedge q \wedge \neg r) \ \vee\ (\neg p \wedge q \wedge r) \ \vee\ (q \wedge \neg r \wedge r) \\
\Leftrightarrow\ & (p \wedge q \wedge \neg r) \ \vee\ (\neg p \wedge q \wedge r) \ \vee\ (q \wedge \bot) \\
\Leftrightarrow\ & (p \wedge q \wedge \neg r) \ \vee\ (\neg p \wedge q \wedge r) \ \vee\ \bot \\
\Leftrightarrow\ & (p \wedge q \wedge \neg r) \ \vee\ (\neg p \wedge q \wedge r)
\end{aligned}
$$

Normální formy formulí

K dané tabulce pravdivostních hodnot můžeme snadno vyrobit příslušné formule v DNF a KNF:

p	q	r	φ
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

DNF:
$(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$

KNF:
$(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$

Normální formy formulí

Pokud uvažujeme pevně danou **konečnou** množinu atomických výroků At:

- **Úplná disjunktivní normální forma** (**ÚDNF**) — formule v DNF, kde každá elementární konjunkce obsahuje každý atomický výrok z At právě jednou.

  Příklad: $(p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$

- **Úplná konjunktivní normální forma** (**ÚKNF**) — formule v KNF, kde každá klauzule obsahuje každý atomický výrok z At právě jednou.

  Příklad: $(p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)$

Poznámka: V příkladech je $At = \{p, q, r\}$.

Minimální množiny logických spojek

Z předchozího vidíme, že spojky "$\neg$", "$\wedge$" a "$\vee$" postačují na vytvoření formule pro jakoukoliv tabulku pravdivostních hodnot.

Ve skutečnosti stačí i některé menší množiny logických spojek:

- "$\neg$", "$\wedge$":
  $\varphi \vee \psi$ je možno vyjádřit jako $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$
- "$\neg$", "$\vee$":
  $\varphi \wedge \psi$ je možno vyjádřit jako $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$
- "$\neg$", "$\rightarrow$":
  $\varphi \vee \psi$ je možno vyjádřit jako $\neg\varphi \rightarrow \psi$
  $\varphi \wedge \psi$ je možno vyjádřit jako $\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$

Minimální množiny logických spojek

- "$\rightarrow$", "$\bot$":
  $\neg\varphi$ je možno vyjádřit jako $\varphi \rightarrow \bot$
  $\varphi \vee \psi$ je možno vyjádřit jako $(\varphi \rightarrow \bot) \rightarrow \psi$
  $\varphi \wedge \psi$ je možno vyjádřit jako $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \bot)) \rightarrow \bot$

- "$|$" — NAND — Shefferova funkce (též se označuje "$\uparrow$"):

φ	ψ	$\varphi \mid \psi$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

  $\neg\varphi$ je možno vyjádřit jako $\varphi \mid \varphi$
  $\varphi \vee \psi$ je možno vyjádřit jako $(\varphi \mid \varphi) \mid (\psi \mid \psi)$
  $\varphi \wedge \psi$ je možno vyjádřit jako $(\varphi \mid \psi) \mid (\varphi \mid \psi)$

Minimální množiny logických spojek

- "$\downarrow$" — NOR — Peirceova funkce:

φ	ψ	$\varphi \downarrow \psi$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$\neg\varphi$ je možno vyjádřit jako $\varphi \downarrow \varphi$
$\varphi \vee \psi$ je možno vyjádřit jako $(\varphi \downarrow \psi) \downarrow (\varphi \downarrow \psi)$
$\varphi \wedge \psi$ je možno vyjádřit jako $(\varphi \downarrow \varphi) \downarrow (\psi \downarrow \psi)$