Bezkontextové gramatiky

Bezkontextové gramatiky

Příklad: Chtěli bychom popsat jazyk aritmetických výrazů obsahující výrazy jako například:

`175`   `(9+15)`   `(((10-4)*((1+34)+2))/(3+(-37)))`

Pro jednoduchost předpokládejme:

- Výrazy jsou plně uzávorkované.
- Jediné aritmetické operace jsou "`+`", "`-`", "`*`", "`/`" a unární "`-`".
- Hodnoty operandů jsou přirozená čísla zapsaná v desítkové soustavě — zápis čísla je neprázdná posloupnost číslic.

Abeceda jazyka: $\Sigma = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{2}, \mathtt{3}, \mathtt{4}, \mathtt{5}, \mathtt{6}, \mathtt{7}, \mathtt{8}, \mathtt{9}, \mathtt{+}, \mathtt{-}, \mathtt{*}, \mathtt{/}, \mathtt{(}, \mathtt{)}\}$

Bezkontextové gramatiky

Příklad (pokr.): Popis pomocí induktivní definice:

- **Číslice** je libovolný ze znaků `0`, `1`, `2`, `3`, `4`, `5`, `6`, `7`, `8`, `9`.
- **Číslo** je neprázdná posloupnost číslic, tj.:
  - Pokud je α číslice, tak α je číslo.
  - Pokud α je číslice a β je číslo, tak i $\alpha\beta$ je číslo.
- **Výraz** je libovolná posloupnost symbolů vytvořená podle následujících pravidel:
  - Pokud je α číslo, tak α je výraz.
  - Pokud α je výraz, tak i $(-\alpha)$ je výraz.
  - Pokud α a β jsou výrazy, tak i $(\alpha+\beta)$ je výraz.
  - Pokud α a β jsou výrazy, tak i $(\alpha-\beta)$ je výraz.
  - Pokud α a β jsou výrazy, tak i $(\alpha*\beta)$ je výraz.
  - Pokud α a β jsou výrazy, tak i (α/β) je výraz.

Bezkontextové gramatiky

Příklad (pokr.): Způsob zápisu téže informace jako v předchozí induktivní definici pomocí **bezkontextové gramatiky**:

Zavedeme následující pomocné symboly — těmto symbolům se říká **neterminály**:

- D — zastupuje libovolnou číslici
- C — zastupuje libovolné číslo
- E — zastupuje libovolný výraz

$$
\begin{array}{llll}
D \to 0 & D \to 5 & & E \to C \\
D \to 1 & D \to 6 & & E \to (-E) \\
D \to 2 & D \to 7 & C \to D & E \to (E+E) \\
D \to 3 & D \to 8 & C \to DC & E \to (E-E) \\
D \to 4 & D \to 9 & & E \to (E*E) \\
 & & & E \to (E/E)
\end{array}
$$

Příklad (pokr.): Stručnější způsob zápisu:

$$
\begin{aligned}
D &\rightarrow \mathtt{0} \mid \mathtt{1} \mid \mathtt{2} \mid \mathtt{3} \mid \mathtt{4} \mid \mathtt{5} \mid \mathtt{6} \mid \mathtt{7} \mid \mathtt{8} \mid \mathtt{9} \\
C &\rightarrow D \mid DC \\
E &\rightarrow C \mid \mathtt{(-}E\mathtt{)} \mid \mathtt{(}E\mathtt{+}E\mathtt{)} \mid \mathtt{(}E\mathtt{-}E\mathtt{)} \mid \mathtt{(}E\mathtt{*}E\mathtt{)} \mid \mathtt{(}E\mathtt{/}E\mathtt{)}
\end{aligned}
$$

Příklad: Jazyk, kde slova jsou (případně i prázdné) posloupnosti výrazů popsaných v předchozím příkladě, kde jednotlivé výrazy jsou odděleny čárkami (abecedu je třeba rozšířit o symbol “,”):

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow T \mid \varepsilon \\
T &\rightarrow E \mid E\,,T \\
D &\rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9 \\
C &\rightarrow D \mid DC \\
E &\rightarrow C \mid (\text{-}E) \mid (E\text{+}E) \mid (E\text{-}E) \mid (E\text{*}E) \mid (E/E)
\end{aligned}
$$

Bezkontextové gramatiky

Příklad: Příkazy nějakého programovacího jazyka (fragment gramatiky):

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow E; \mid T \mid \texttt{if (}E\texttt{)}\ S \mid \texttt{if (}E\texttt{)}\ S\ \texttt{else}\ S \\
&\quad \mid \texttt{while (}E\texttt{)}\ S \mid \texttt{do}\ S\ \texttt{while (}E\texttt{);} \mid \texttt{for (}F;F;F\texttt{)}\ S \\
&\quad \mid \texttt{return}\ F; \\
T &\rightarrow \{\ U\ \} \\
U &\rightarrow \varepsilon \mid SU \\
F &\rightarrow \varepsilon \mid E \\
E &\rightarrow \quad \ldots \\
& \quad\quad \ldots
\end{aligned}
$$

Poznámka:

- S — příkaz
- T — blok příkazů
- U — sekvence příkazů
- E — výraz
- F — výraz, který je možno vynechat

Formálně je **bezkontextová gramatika** definována jako čtveřice

$$\mathcal{G} = (\Pi, \Sigma, S, P)$$

kde:

- Π je konečná množina **neterminálních symbolů** (**neterminálů**)
- Σ je konečná množina **terminálních symbolů** (**terminálů**), přičemž $\Pi \cap \Sigma = \emptyset$
- $S \in \Pi$ je **počáteční neterminál**
- $P \subseteq \Pi \times (\Pi \cup \Sigma)^*$ je konečná množina **přepisovacích pravidel**

Bezkontextové gramatiky

Poznámky:

- Pro označení neterminálních symbolů budeme používat velká písmena A, B, C, ...
- Pro označení terminálních symbolů budeme používat malá písmena a, b, c, ... nebo číslice 0, 1, 2, ...
- Pro označení řetězců z $(\Pi \cup \Sigma)^*$ budeme používat malá písmena řecké abecedy α, β, γ, ...
- Místo zápisu (A, α) budeme pro pravidla používat zápis

$$A \rightarrow \alpha$$

A – levá strana pravidla
α – pravá strana pravidla

Bezkontextové gramatiky

Příklad: Gramatika $\mathcal{G} = (\Pi, \Sigma, S, P)$, kde

- $\Pi = \{A, B, C\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $S = A$
- P obsahuje pravidla

$$
\begin{aligned}
A &\rightarrow aBBb \\
A &\rightarrow AaA \\
B &\rightarrow \varepsilon \\
B &\rightarrow bCA \\
C &\rightarrow AB \\
C &\rightarrow a \\
C &\rightarrow b
\end{aligned}
$$

Bezkontextové gramatiky

Poznámka: Pokud máme více pravidel se stejnou levou stranou, jako třeba

$$A \rightarrow \alpha_1 \qquad\qquad A \rightarrow \alpha_2 \qquad\qquad A \rightarrow \alpha_3$$

můžeme je stručněji zapsat jako

$$A \rightarrow \alpha_1 \mid \alpha_2 \mid \alpha_3$$

Například pravidla dříve uvedené gramatiky můžeme zapsat jako

$$\begin{aligned} A &\rightarrow aBBb \mid AaA \\ B &\rightarrow \varepsilon \mid bCA \\ C &\rightarrow AB \mid a \mid b \end{aligned}$$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $\mathcal{G} = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$
\begin{aligned}
A &\to aBBb \mid AaA \\
B &\to \varepsilon \mid bCA \\
C &\to AB \mid a \mid b
\end{aligned}
$$

Například slovo *abbabb* je možné v gramatice $\mathcal{G}$ vygenerovat následujícím způsobem:

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $\mathcal{G} = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$\begin{aligned} A &\rightarrow aBBb \mid AaA \\ B &\rightarrow \varepsilon \mid bCA \\ C &\rightarrow AB \mid a \mid b \end{aligned}$$

Například slovo $abbabb$ je možné v gramatice $\mathcal{G}$ vygenerovat následujícím způsobem:

A

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $\mathcal{G} = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$\begin{aligned} \underline{A} &\rightarrow aBBb \mid AaA \\ B &\rightarrow \varepsilon \mid bCA \\ C &\rightarrow AB \mid a \mid b \end{aligned}$$

Například slovo *abbabb* je možné v gramatice $\mathcal{G}$ vygenerovat následujícím způsobem:

$\underline{A}$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $\mathcal{G} = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$\begin{aligned} \underline{A} &\rightarrow \underline{aBBb} \mid AaA \\ B &\rightarrow \varepsilon \mid bCA \\ C &\rightarrow AB \mid a \mid b \end{aligned}$$

Například slovo $abbabb$ je možné v gramatice $\mathcal{G}$ vygenerovat následujícím způsobem:

$\underline{A} \Rightarrow \underline{aBBb}$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $\mathcal{G} = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$\begin{aligned} A &\to aBBb \mid AaA \\ B &\to \varepsilon \mid bCA \\ C &\to AB \mid a \mid b \end{aligned}$$

Například slovo $abbabb$ je možné v gramatice $\mathcal{G}$ vygenerovat následujícím způsobem:

$A \Rightarrow aBBb$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $\mathcal{G} = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$\begin{aligned} A &\rightarrow aBBb \mid AaA \\ \underline{B} &\rightarrow \varepsilon \mid bCA \\ C &\rightarrow AB \mid a \mid b \end{aligned}$$

Například slovo *abbabb* je možné v gramatice $\mathcal{G}$ vygenerovat následujícím způsobem:

$A \Rightarrow a\underline{B}Bb$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $\mathcal{G} = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$
\begin{aligned}
A &\rightarrow aBBb \mid AaA \\
\underline{B} &\rightarrow \varepsilon \mid \underline{bCA} \\
C &\rightarrow AB \mid a \mid b
\end{aligned}
$$

Například slovo *abbabb* je možné v gramatice $\mathcal{G}$ vygenerovat následujícím způsobem:

$A \Rightarrow a\underline{B}Bb \Rightarrow a\underline{bCA}Bb$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $\mathcal{G} = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$
\begin{aligned}
A &\rightarrow aBBb \mid AaA \\
B &\rightarrow \varepsilon \mid bCA \\
C &\rightarrow AB \mid a \mid b
\end{aligned}
$$

Například slovo $abbabb$ je možné v gramatice $\mathcal{G}$ vygenerovat následujícím způsobem:

$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $\mathcal{G} = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$\begin{aligned} \underline{A} &\rightarrow aBBb \mid AaA \\ B &\rightarrow \varepsilon \mid bCA \\ C &\rightarrow AB \mid a \mid b \end{aligned}$$

Například slovo $abbabb$ je možné v gramatice $\mathcal{G}$ vygenerovat následujícím způsobem:

$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abC\underline{A}Bb$

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $\mathcal{G} = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$\begin{aligned} \underline{A} &\rightarrow \underline{aBBb} \mid AaA \\ B &\rightarrow \varepsilon \mid bCA \\ C &\rightarrow AB \mid a \mid b \end{aligned}$$

Například slovo $abbabb$ je možné v gramatice $\mathcal{G}$ vygenerovat následujícím způsobem:

$$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abC\underline{A}Bb \Rightarrow abC\underline{aBBb}Bb$$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $\mathcal{G} = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$
\begin{aligned}
A &\rightarrow aBBb \mid AaA \\
B &\rightarrow \varepsilon \mid bCA \\
C &\rightarrow AB \mid a \mid b
\end{aligned}
$$

Například slovo *abbabb* je možné v gramatice $\mathcal{G}$ vygenerovat následujícím způsobem:

$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $\mathcal{G} = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$\begin{aligned} A &\to aBBb \mid AaA \\ \underline{B} &\to \varepsilon \mid bCA \\ C &\to AB \mid a \mid b \end{aligned}$$

Například slovo $abbabb$ je možné v gramatice $\mathcal{G}$ vygenerovat následujícím způsobem:

$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaB\underline{B}bBb$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $\mathcal{G} = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$\begin{aligned} A &\to aBBb \mid AaA \\ \underline{B} &\to \underline{\varepsilon} \mid bCA \\ C &\to AB \mid a \mid b \end{aligned}$$

Například slovo *abbabb* je možné v gramatice $\mathcal{G}$ vygenerovat následujícím způsobem:

$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaB\underline{B}bBb \Rightarrow abCaBbBb$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $\mathcal{G} = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$
\begin{aligned}
A &\to aBBb \mid AaA \\
B &\to \varepsilon \mid bCA \\
C &\to AB \mid a \mid b
\end{aligned}
$$

Například slovo *abbabb* je možné v gramatice $\mathcal{G}$ vygenerovat následujícím způsobem:

$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow abCaBbBb$

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $\mathcal{G} = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$\begin{aligned} A &\rightarrow aBBb \mid AaA \\ B &\rightarrow \varepsilon \mid bCA \\ \underline{C} &\rightarrow AB \mid a \mid b \end{aligned}$$

Například slovo *abbabb* je možné v gramatice $\mathcal{G}$ vygenerovat následujícím způsobem:

$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow ab\underline{C}aBbBb$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $\mathcal{G} = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$\begin{aligned} A &\rightarrow aBBb \mid AaA \\ B &\rightarrow \varepsilon \mid bCA \\ \underline{C} &\rightarrow AB \mid a \mid \underline{b} \end{aligned}$$

Například slovo $abbabb$ je možné v gramatice $\mathcal{G}$ vygenerovat následujícím způsobem:

$$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow ab\underline{C}aBbBb \Rightarrow ab\underline{b}aBbBb$$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $\mathcal{G} = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$\begin{aligned} A &\to aBBb \mid AaA \\ B &\to \varepsilon \mid bCA \\ C &\to AB \mid a \mid b \end{aligned}$$

Například slovo $abbabb$ je možné v gramatice $\mathcal{G}$ vygenerovat následujícím způsobem:

$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow abCaBbBb \Rightarrow abbaBbBb$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $\mathcal{G} = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$\begin{aligned} A &\to aBBb \mid AaA \\ \underline{B} &\to \varepsilon \mid bCA \\ C &\to AB \mid a \mid b \end{aligned}$$

Například slovo $abbabb$ je možné v gramatice $\mathcal{G}$ vygenerovat následujícím způsobem:

$$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow abCaBbBb \Rightarrow abbaBb\underline{B}b$$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $\mathcal{G} = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$
\begin{aligned}
A &\to aBBb \mid AaA \\
\underline{B} &\to \underline{\varepsilon} \mid bCA \\
C &\to AB \mid a \mid b
\end{aligned}
$$

Například slovo *abbabb* je možné v gramatice $\mathcal{G}$ vygenerovat následujícím způsobem:

$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow abCaBbBb \Rightarrow abbaBb\underline{B}b \Rightarrow abbaBbb$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $\mathcal{G} = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$\begin{aligned} A &\to aBBb \mid AaA \\ B &\to \varepsilon \mid bCA \\ C &\to AB \mid a \mid b \end{aligned}$$

Například slovo $abbabb$ je možné v gramatice $\mathcal{G}$ vygenerovat následujícím způsobem:

$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow abCaBbBb \Rightarrow abbaBbBb \Rightarrow abbaBbb$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $\mathcal{G} = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$\begin{aligned} A &\rightarrow aBBb \mid AaA \\ \underline{B} &\rightarrow \varepsilon \mid bCA \\ C &\rightarrow AB \mid a \mid b \end{aligned}$$

Například slovo *abbabb* je možné v gramatice $\mathcal{G}$ vygenerovat následujícím způsobem:

$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow abCaBbBb \Rightarrow abbaBbBb \Rightarrow abba\underline{B}bb$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $\mathcal{G} = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$
\begin{aligned}
A &\rightarrow aBBb \mid AaA \\
\underline{B} &\rightarrow \underline{\varepsilon} \mid bCA \\
C &\rightarrow AB \mid a \mid b
\end{aligned}
$$

Například slovo $abbabb$ je možné v gramatice $\mathcal{G}$ vygenerovat následujícím způsobem:

$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow abCaBbBb \Rightarrow abbaBbBb \Rightarrow abba\underline{B}bb \Rightarrow abbabb$

Bezkontextové gramatiky

Gramatiky slouží ke generování slov.

Příklad: $\mathcal{G} = (\Pi, \Sigma, A, P)$, kde $\Pi = \{A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje pravidla

$$\begin{aligned} A &\to aBBb \mid AaA \\ B &\to \varepsilon \mid bCA \\ C &\to AB \mid a \mid b \end{aligned}$$

Například slovo $abbabb$ je možné v gramatice $\mathcal{G}$ vygenerovat následujícím způsobem:

$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow abCaBbBb \Rightarrow abbaBbBb \Rightarrow abbaBbb \Rightarrow abbabb$

Bezkontextové gramatiky

Na řetězcích z $(\Pi \cup \Sigma)^*$ definujeme relaci $\Rightarrow \subseteq (\Pi \cup \Sigma)^* \times (\Pi \cup \Sigma)^*$ takovou, že

$$\alpha \Rightarrow \alpha'$$

právě když $\alpha = \beta_1 A \beta_2$ a $\alpha' = \beta_1 \gamma \beta_2$ pro nějaká $\beta_1, \beta_2, \gamma \in (\Pi \cup \Sigma)^*$ a $A \in \Pi$, kde $(A \rightarrow \gamma) \in P$.

Příklad: Jestliže $(B \rightarrow bCA) \in P$, pak

$$aCBbA \Rightarrow aCbCAbA$$

Poznámka: Neformálně řečeno zápis $\alpha \Rightarrow \alpha'$ znamená, že z α je možné jedním krokem odvodit α', a to tak, že výskyt nějakého neterminálu A v α nahradíme pravou stranou nějakého pravidla $A \rightarrow \gamma$, kde se A vyskytuje na levé straně.

Bezkontextové gramatiky

Na řetězcích z $(\Pi \cup \Sigma)^*$ definujeme relaci $\Rightarrow \subseteq (\Pi \cup \Sigma)^* \times (\Pi \cup \Sigma)^*$ takovou, že

$$\alpha \Rightarrow \alpha'$$

právě když $\alpha = \beta_1 A \beta_2$ a $\alpha' = \beta_1 \gamma \beta_2$ pro nějaká $\beta_1, \beta_2, \gamma \in (\Pi \cup \Sigma)^*$ a $A \in \Pi$, kde $(A \to \gamma) \in P$.

Příklad: Jestliže $(B \to bCA) \in P$, pak

$$aC\underline{B}bA \Rightarrow aC\underline{bCA}bA$$

Poznámka: Neformálně řečeno zápis $\alpha \Rightarrow \alpha'$ znamená, že z α je možné jedním krokem odvodit α', a to tak, že výskyt nějakého neterminálu A v α nahradíme pravou stranou nějakého pravidla $A \to \gamma$, kde se A vyskytuje na levé straně.

Bezkontextové gramatiky

Derivace délky n je posloupnost $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$, kde $\beta_i \in (\Pi \cup \Sigma)^*$ a kde $\beta_{i-1} \Rightarrow \beta_i$ pro všechna $1 \le i \le n$, což můžeme stručněji zapsat

$$\beta_0 \Rightarrow \beta_1 \Rightarrow \beta_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \beta_{n-1} \Rightarrow \beta_n$$

Skutečnost, že pro dané $\alpha, \alpha' \in (\Pi \cup \Sigma)^*$ a $n \in \mathbb{N}$ existuje nějaká derivace $\beta_0 \Rightarrow \beta_1 \Rightarrow \beta_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \beta_{n-1} \Rightarrow \beta_n$, kde $\alpha = \beta_0$ a $\alpha' = \beta_n$, zapisujeme

$$\alpha \Rightarrow^n \alpha'$$

Skutečnost, že $\alpha \Rightarrow^n \alpha'$ pro nějaké $n \ge 0$, zapisujeme

$$\alpha \Rightarrow^* \alpha'$$

Poznámka: Relace $\Rightarrow^*$ je reflexivním a tranzitivním uzávěrem relace $\Rightarrow$ (tj. nejmenší reflexivní a tranzitivní relací obsahující relaci $\Rightarrow$).

Bezkontextové gramatiky

Větné formy jsou ty $\alpha \in (\Pi \cup \Sigma)^*$, pro které platí

$$S \Rightarrow^* \alpha$$

kde S je počáteční neterminál.

Bezkontextové gramatiky

Jazyk $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ generovaný gramatikou $\mathcal{G} = (\Pi, \Sigma, S, P)$ je množina všech slov v abecedě Σ, která lze odvodit nějakou derivací z počátečního neterminálu S pomocí pravidel z P, tj.

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}) = \{w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow^* w\}$$

Definice

Jazyk L je **bezkontextový**, jestliže existuje bezkontextová gramatika $\mathcal{G}$ taková, že $L = \mathcal{L}(\mathcal{G})$.

Derivační strom

$$
\begin{aligned}
A &\rightarrow aBBb \mid AaA \\
B &\rightarrow \varepsilon \mid bCA \\
C &\rightarrow AB \mid a \mid b
\end{aligned}
$$

Derivační strom

A

$$
\begin{aligned}
A &\rightarrow aBBb \mid AaA \\
B &\rightarrow \varepsilon \mid bCA \\
C &\rightarrow AB \mid a \mid b
\end{aligned}
$$

A

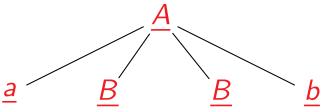
Derivační strom

$\underline{A}$

$$
\begin{aligned}
\underline{A} &\rightarrow aBBb \mid AaA \\
B &\rightarrow \varepsilon \mid bCA \\
C &\rightarrow AB \mid a \mid b
\end{aligned}
$$

$\underline{A}$

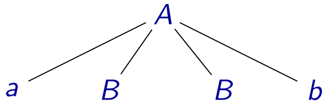
Derivační strom



$$
\begin{aligned}
A &\rightarrow aBBb \mid AaA \\
B &\rightarrow \varepsilon \mid bCA \\
C &\rightarrow AB \mid a \mid b
\end{aligned}
$$

$$A \Rightarrow aBBb$$

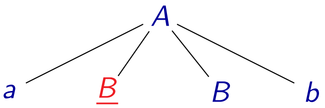
Derivační strom



$$A \to aBBb \mid AaA$$
$$B \to \varepsilon \mid bCA$$
$$C \to AB \mid a \mid b$$

$$A \Rightarrow aBBb$$

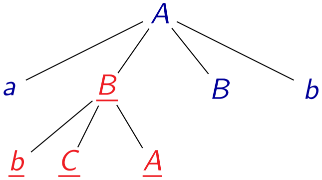
Derivační strom



$$
\begin{aligned}
A &\rightarrow aBBb \mid AaA \\
\underline{B} &\rightarrow \varepsilon \mid bCA \\
C &\rightarrow AB \mid a \mid b
\end{aligned}
$$

$$A \Rightarrow a\underline{B}Bb$$

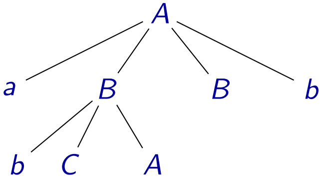
Derivační strom



$$
\begin{aligned}
A &\to aBBb \mid AaA \\
\underline{B} &\to \varepsilon \mid \underline{bCA} \\
C &\to AB \mid a \mid b
\end{aligned}
$$

$$A \Rightarrow a\underline{B}Bb \Rightarrow a\underline{bCA}Bb$$

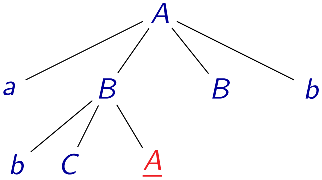
Derivační strom



$$
\begin{aligned}
A &\rightarrow aBBb \mid AaA \\
B &\rightarrow \varepsilon \mid bCA \\
C &\rightarrow AB \mid a \mid b
\end{aligned}
$$

$$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb$$

Derivační strom

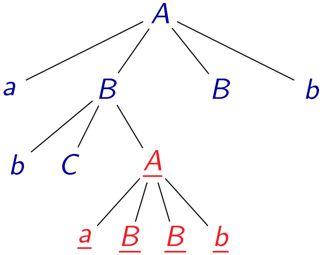


$\underline{A} \rightarrow aBBb \mid AaA$
$B \rightarrow \varepsilon \mid bCA$
$C \rightarrow AB \mid a \mid b$

$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abC\underline{A}Bb$

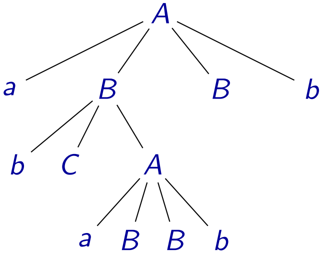
Derivační strom

$$\underline{A} \rightarrow \underline{aBBb} \mid AaA$$
$$B \rightarrow \varepsilon \mid bCA$$
$$C \rightarrow AB \mid a \mid b$$



$$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abC\underline{A}Bb \Rightarrow abC\underline{aBBb}Bb$$

Derivační strom

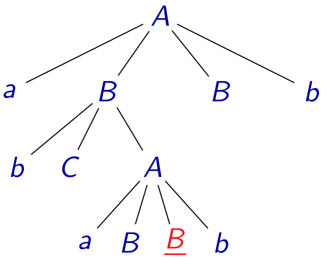


$$A \rightarrow aBBb \mid AaA$$
$$B \rightarrow \varepsilon \mid bCA$$
$$C \rightarrow AB \mid a \mid b$$

$$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb$$

Derivační strom

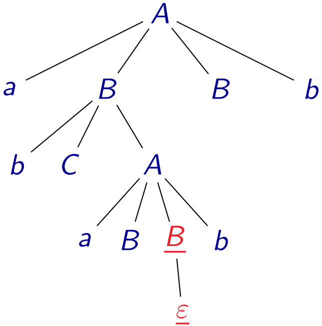
$$A \rightarrow aBBb \mid AaA$$
$$\underline{B} \rightarrow \varepsilon \mid bCA$$
$$C \rightarrow AB \mid a \mid b$$



$$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaB\underline{B}bBb$$

Derivační strom

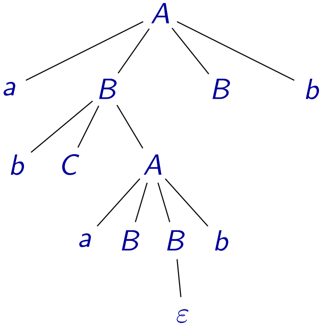
$A \rightarrow aBBb \mid AaA$
$\underline{B} \rightarrow \underline{\varepsilon} \mid bCA$
$C \rightarrow AB \mid a \mid b$



$$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaB\underline{B}bBb \Rightarrow abCaBbBb$$

Derivační strom

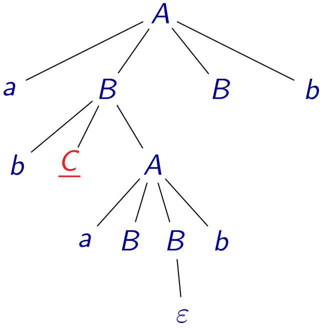
$$A \rightarrow aBBb \mid AaA$$
$$B \rightarrow \varepsilon \mid bCA$$
$$C \rightarrow AB \mid a \mid b$$



$$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow abCaBbBb$$

Derivační strom

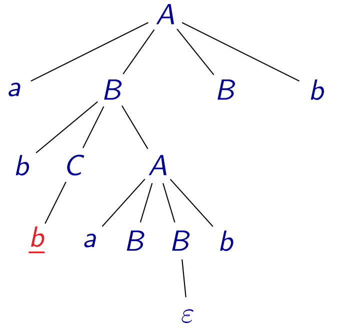
$$A \rightarrow aBBb \mid AaA$$
$$B \rightarrow \varepsilon \mid bCA$$
$$\underline{C} \rightarrow AB \mid a \mid b$$



$$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow ab\underline{C}aBbBb$$

Derivační strom

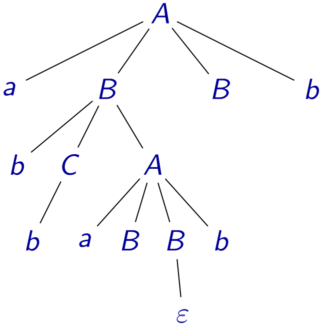
$$
\begin{aligned}
A &\rightarrow aBBb \mid AaA \\
B &\rightarrow \varepsilon \mid bCA \\
\underline{C} &\rightarrow AB \mid a \mid \underline{b}
\end{aligned}
$$



$$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow ab\underline{C}aBbBb \Rightarrow ab\underline{b}aBbBb$$

Derivační strom

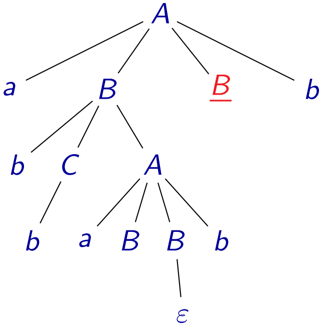
$$A \to aBBb \mid AaA$$
$$B \to \varepsilon \mid bCA$$
$$C \to AB \mid a \mid b$$



$$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow abCaBbBb \Rightarrow abbaBbBb$$

Derivační strom

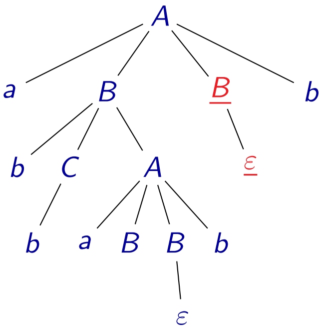
$$A \rightarrow aBBb \mid AaA$$
$$B \rightarrow \varepsilon \mid bCA$$
$$C \rightarrow AB \mid a \mid b$$



$$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow abCaBbBb \Rightarrow abbaBbBb$$

Derivační strom

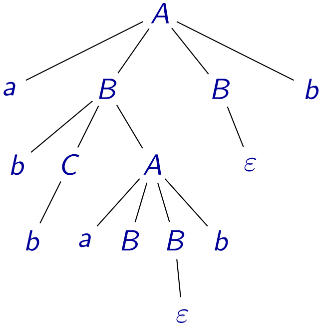
$$
\begin{aligned}
A &\rightarrow aBBb \mid AaA \\
\underline{B} &\rightarrow \underline{\varepsilon} \mid bCA \\
C &\rightarrow AB \mid a \mid b
\end{aligned}
$$



$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow abCaBbBb \Rightarrow abbaBb\underline{B}b \Rightarrow abbaBbb$

Derivační strom

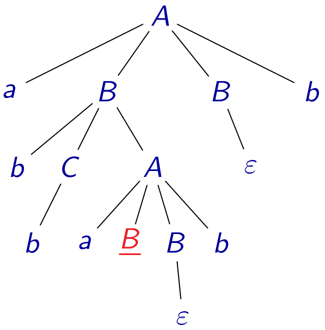
$$A \rightarrow aBBb \mid AaA$$
$$B \rightarrow \varepsilon \mid bCA$$
$$C \rightarrow AB \mid a \mid b$$



$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow abCaBbBb \Rightarrow abbaBbBb \Rightarrow abbaBbb$

Derivační strom

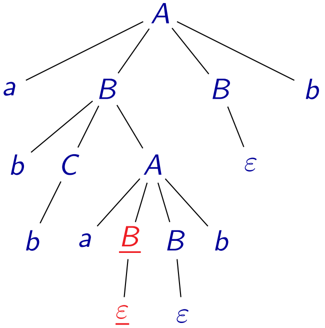
$$A \rightarrow aBBb \mid AaA$$
$$\underline{B} \rightarrow \varepsilon \mid bCA$$
$$C \rightarrow AB \mid a \mid b$$



$$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow abCaBbBb \Rightarrow abbaBbBb \Rightarrow abba\underline{B}bb$$

Derivační strom

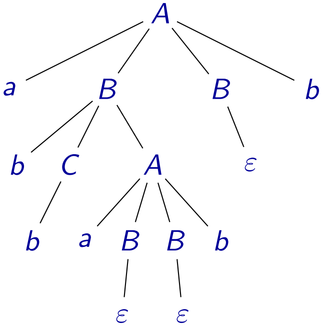
$$A \rightarrow aBBb \mid AaA$$
$$\underline{B} \rightarrow \underline{\varepsilon} \mid bCA$$
$$C \rightarrow AB \mid a \mid b$$



$$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow abCaBbBb \Rightarrow abbaBbBb \Rightarrow abba\underline{B}bb \Rightarrow abbabb$$

Derivační strom

$$
\begin{aligned}
A &\rightarrow aBBb \mid AaA \\
B &\rightarrow \varepsilon \mid bCA \\
C &\rightarrow AB \mid a \mid b
\end{aligned}
$$



$A \Rightarrow aBBb \Rightarrow abCABb \Rightarrow abCaBBbBb \Rightarrow abCaBbBb \Rightarrow abbaBbBb \Rightarrow abbaBbb \Rightarrow abbabb$

Derivační strom

Každé derivaci odpovídá nějaký **derivační strom**:

- Vrcholy stromu jsou ohodnoceny terminály a neterminály.
- Kořen stromu je ohodnocen počátečním neterminálem.
- Listy stromu jsou ohodnoceny terminály nebo symboly ε.
- Ostatní vrcholy stromu jsou ohodnoceny neterminály.
- Pokud je vrchol ohodnocen neterminálem A, pak jeho potomci jsou ohodnoceni symboly pravé strany nějakého přepisovacího pravidla $A \to \alpha$.

Příklad: Gramatika generující jazyk

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

Bezkontextové gramatiky

Příklad: Gramatika generující jazyk

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

Gramatika $\mathcal{G} = (\Pi, \Sigma, S, P)$, kde $\Pi = \{S\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje

$$S \to \varepsilon \mid aSb$$

Bezkontextové gramatiky

Příklad: Gramatika generující jazyk

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

Gramatika $\mathcal{G} = (\Pi, \Sigma, S, P)$, kde $\Pi = \{S\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ a P obsahuje

$$S \to \varepsilon \mid aSb$$

$$\begin{array}{l}
S \Rightarrow \varepsilon \\
S \Rightarrow aSb \Rightarrow ab \\
S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aabb \\
S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aaaSbbb \Rightarrow aaabbb \\
S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aaaSbbb \Rightarrow aaaaSbbbb \Rightarrow aaaabbbb \\
\qquad \dots
\end{array}$$

Příklad: Gramatika generující jazyk L tvořený všemi palindromy nad abecedou $\{a, b\}$, tj.

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = w^R\}$$

Poznámka: w^R označuje tzv. **zrcadlový obraz** slova w, tj. slovo w zapsané pozpátku.

Příklad: Gramatika generující jazyk L tvořený všemi palindromy nad abecedou $\{a, b\}$, tj.

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = w^R\}$$

Poznámka: w^R označuje tzv. **zrcadlový obraz** slova w, tj. slovo w zapsané pozpátku.

Řešení:

$$S \to \varepsilon \mid a \mid b \mid aSa \mid bSb$$

Bezkontextové gramatiky

Příklad: Gramatika generující jazyk L tvořený všemi palindromy nad abecedou $\{a, b\}$, tj.

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = w^R\}$$

Poznámka: w^R označuje tzv. **zrcadlový obraz** slova w, tj. slovo w zapsané pozpátku.

Řešení:

$$S \rightarrow \varepsilon \mid a \mid b \mid aSa \mid bSb$$

$$S \Rightarrow aSa \Rightarrow abSba \Rightarrow abaSaba \Rightarrow abaaaba$$

Bezkontextové gramatiky

Příklad: Gramatika generující jazyk L tvořený všemi dobře uzávorkovanými sekvencemi symbolů '$($' a '$)$'.

Například $(()())(()) \in L$, ale $)()) \notin L$.

Příklad: Gramatika generující jazyk L tvořený všemi dobře uzávorkovanými sekvencemi symbolů '$($' a '$)$'.

Například $(()())(()) \in L$, ale $)())) \notin L$.

Řešení:

$$A \rightarrow \varepsilon \mid (A) \mid AA$$

Bezkontextové gramatiky

Příklad: Gramatika generující jazyk L tvořený všemi dobře uzávorkovanými sekvencemi symbolů '$($' a '$)$'.

Například $(()())(()) \in L$, ale $)()) \notin L$.

Řešení:

$$A \rightarrow \varepsilon \mid (A) \mid AA$$

$A \Rightarrow AA \Rightarrow (A)A \Rightarrow (A)(A) \Rightarrow (AA)(A) \Rightarrow ((A)A)(A) \Rightarrow (()A)(A) \Rightarrow (()(A))(A) \Rightarrow (()())(A) \Rightarrow (()())((A)) \Rightarrow (()())(())$

Bezkontextové gramatiky

Příklad: Gramatika generující jazyk L tvořený všemi dobře vytvořenými aritmetickými výrazy, kde operandy jsou vždy tvaru 'a', a kde jako operátory můžeme používat symboly $+$ a $*$.

Například $(a + a) * a + (a * a) \in L$.

Příklad: Gramatika generující jazyk L tvořený všemi dobře vytvořenými aritmetickými výrazy, kde operandy jsou vždy tvaru 'a', a kde jako operátory můžeme používat symboly $+$ a $*$.

Například $(a + a) * a + (a * a) \in L$.

Řešení:

$$E \rightarrow a \mid E + E \mid E * E \mid (E)$$

Příklad: Gramatika generující jazyk L tvořený všemi dobře vytvořenými aritmetickými výrazy, kde operandy jsou vždy tvaru 'a', a kde jako operátory můžeme používat symboly $+$ a $*$.

Například $(a + a) * a + (a * a) \in L$.

Řešení:

$$E \rightarrow a \mid E + E \mid E * E \mid (E)$$

$E \Rightarrow E + E \Rightarrow E * E + E \Rightarrow (E) * E + E \Rightarrow (E + E) * E + E \Rightarrow (a + E) * E + E \Rightarrow (a + a) * E + E \Rightarrow (a + a) * a + E \Rightarrow (a + a) * a + (E) \Rightarrow (a + a) * a + (E * E) \Rightarrow (a + a) * a + (a * E) \Rightarrow (a + a) * a + (a * a)$

Levá a pravá derivace

$$E \to a \mid E + E \mid E * E \mid (E)$$

Levá derivace je derivace, ve které v každém kroku nahrazujeme vždy nejlevější neterminál.

$$\underline{E} \Rightarrow \underline{E} + E \Rightarrow \underline{E} * E + E \Rightarrow a * \underline{E} + E \Rightarrow a * a + \underline{E} \Rightarrow a * a + a$$

Pravá derivace je derivace, ve které v každém kroku nahrazujeme vždy nejpravější neterminál.

$$\underline{E} \Rightarrow E + \underline{E} \Rightarrow \underline{E} + a \Rightarrow E * \underline{E} + a \Rightarrow \underline{E} * a + a \Rightarrow a * a + a$$

Derivace však nemusí být ani levá ani pravá:

$$\underline{E} \Rightarrow \underline{E} + E \Rightarrow E * \underline{E} + E \Rightarrow E * a + \underline{E} \Rightarrow \underline{E} * a + a \Rightarrow a * a + a$$

Levá a pravá derivace

- Jednomu derivačnímu stromu může odpovídat více různých derivací.
- Každému derivačnímu stromu odpovídá právě jedna levá a právě jedna pravá derivace.

Ekvivalence gramatik

Gramatiky $\mathcal{G}_1$ a $\mathcal{G}_2$ jsou **ekvivalentní**, jestliže generují tentýž jazyk, tj. jestliže $\mathcal{L}(\mathcal{G}_1) = \mathcal{L}(\mathcal{G}_2)$.

Poznámka: Problém ekvivalence bezkontextových gramatik je algoritmicky nerozhodnutelný. Dá se dokázat, že není možné vytvořit algoritmus, který by pro libovolné dvě bezkontextové gramatiky rozhodl, zda jsou ekvivalentní či ne.

Dokonce je algoritmicky nerozhodnutelný i problém, zda gramatika generuje jazyk Σ^*.

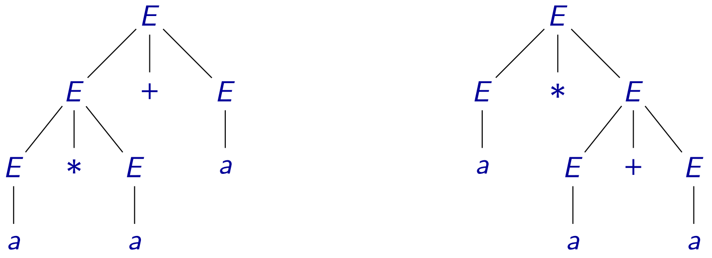
Nejednoznačné gramatiky

Gramatika $\mathcal{G}$ je **nejednoznačná**, jestliže existuje nějaké slovo $w \in \mathcal{L}(\mathcal{G})$, kterému přísluší dva různé derivační stromy, resp. dvě různé levé či dvě různé pravé derivace.

Příklad:

$E \Rightarrow E + E \Rightarrow E * E + E \Rightarrow a * E + E \Rightarrow a * a + E \Rightarrow a * a + a$

$E \Rightarrow E * E \Rightarrow E * E + E \Rightarrow a * E + E \Rightarrow a * a + E \Rightarrow a * a + a$



Nejednoznačné gramatiky

Někdy je možné nejednoznačnou gramatiku nahradit gramatikou, která generuje tentýž jazyk, ale není nejednoznačná.

Příklad: Gramatiku

$$E \to a \mid E + E \mid E * E \mid (E)$$

můžeme nahradit ekvivalentní gramatikou

$$\begin{aligned} E &\to T \mid T + E \\ T &\to F \mid F * T \\ F &\to a \mid (E) \end{aligned}$$

Poznámka: Pokud se nejednoznačná gramatika žádnou ekvivalentní jednoznačnou gramatikou nahradit nedá, říkáme, že je **podstatně nejednoznačná**.

Bezkontextové jazyky

Třída bezkontextových jazyků je uzavřená vůči:

- zřetězení
- sjednocení
- iteraci

Třída bezkontextových jazyků však není uzavřená vůči:

- doplňku
- průniku

Bezkontextové jazyky

Máme dány gramatiky $\mathcal{G}_1 = (\Pi_1, \Sigma, S_1, P_1)$ a $\mathcal{G}_2 = (\Pi_2, \Sigma, S_2, P_2)$, přičemž můžeme předpokládat, že $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \emptyset$ a $S \notin \Pi_1 \cup \Pi_2$.

- Gramatika $\mathcal{G}$ taková, že $\mathcal{L}(\mathcal{G}) = \mathcal{L}(\mathcal{G}_1) \cdot \mathcal{L}(\mathcal{G}_2)$:

$$\mathcal{G} = (\Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \{S\},\ \Sigma,\ S,\ P_1 \cup P_2 \cup \{S \rightarrow S_1 S_2\})$$

- Gramatika $\mathcal{G}$ taková, že $\mathcal{L}(\mathcal{G}) = \mathcal{L}(\mathcal{G}_1) \cup \mathcal{L}(\mathcal{G}_2)$:

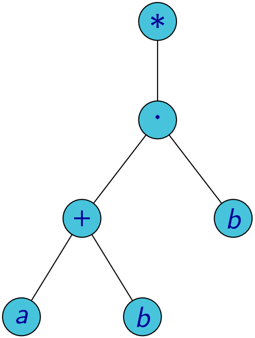
$$\mathcal{G} = (\Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \{S\},\ \Sigma,\ S,\ P_1 \cup P_2 \cup \{S \rightarrow S_1, S \rightarrow S_2\})$$

- Gramatika $\mathcal{G}$ taková, že $\mathcal{L}(\mathcal{G}) = \mathcal{L}(\mathcal{G}_1)^*$:

$$\mathcal{G} = (\Pi_1 \cup \{S\},\ \Sigma,\ S,\ P_1 \cup \{S \rightarrow \varepsilon, S \rightarrow S_1 S\})$$

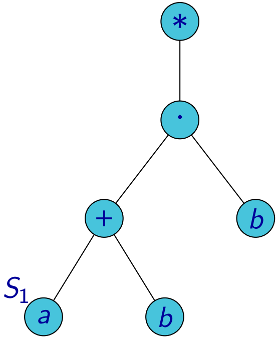
Převod regulárního výrazu na bezkontextovou gramatiku

Příklad: Konstrukce bezkontextové gramatiky k regulárnímu výrazu $((a + b) \cdot b)^*$:



Převod regulárního výrazu na bezkontextovou gramatiku

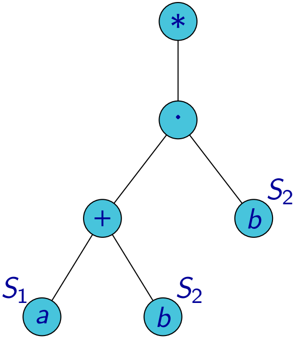
Příklad: Konstrukce bezkontextové gramatiky k regulárnímu výrazu $((a + b) \cdot b)^*$:



$$S_1 \rightarrow a$$

Převod regulárního výrazu na bezkontextovou gramatiku

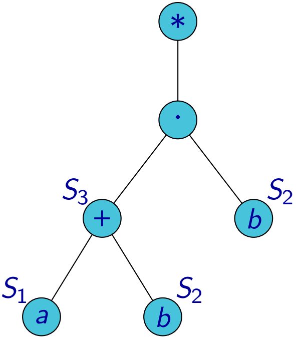
Příklad: Konstrukce bezkontextové gramatiky k regulárnímu výrazu $((a + b) \cdot b)^*$:



$$
\begin{aligned}
S_2 &\to b \\
S_1 &\to a
\end{aligned}
$$

Převod regulárního výrazu na bezkontextovou gramatiku

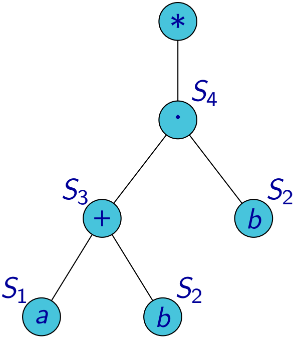
Příklad: Konstrukce bezkontextové gramatiky k regulárnímu výrazu $((a+b)\cdot b)^*$:



$$
\begin{aligned}
S_3 &\rightarrow S_1 \mid S_2\\
S_2 &\rightarrow b\\
S_1 &\rightarrow a
\end{aligned}
$$

Převod regulárního výrazu na bezkontextovou gramatiku

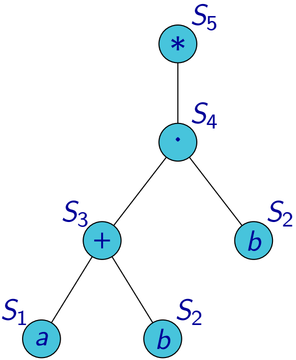
Příklad: Konstrukce bezkontextové gramatiky k regulárnímu výrazu $((a + b) \cdot b)^*$:



$$
\begin{aligned}
S_4 &\rightarrow S_3 S_2 \\
S_3 &\rightarrow S_1 \mid S_2 \\
S_2 &\rightarrow b \\
S_1 &\rightarrow a
\end{aligned}
$$

Převod regulárního výrazu na bezkontextovou gramatiku

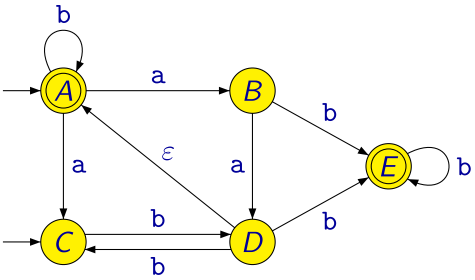
Příklad: Konstrukce bezkontextové gramatiky k regulárnímu výrazu $((a + b) \cdot b)^*$:



$$
\begin{aligned}
S_5 &\to \varepsilon \mid S_4S_5 \\
S_4 &\to S_3S_2 \\
S_3 &\to S_1 \mid S_2 \\
S_2 &\to b \\
S_1 &\to a
\end{aligned}
$$

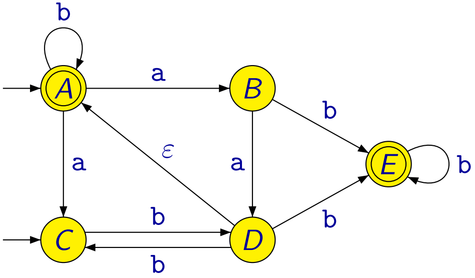
Převod konečného automatu na bezkontextovou gramatiku

Příklad:



Převod konečného automatu na bezkontextovou gramatiku

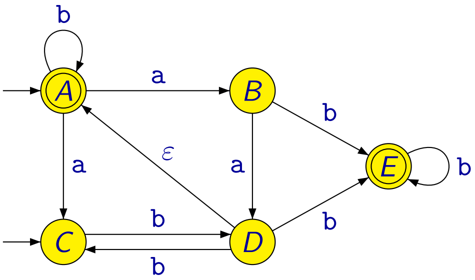
Příklad:



$$S \to A \mid C$$

Převod konečného automatu na bezkontextovou gramatiku

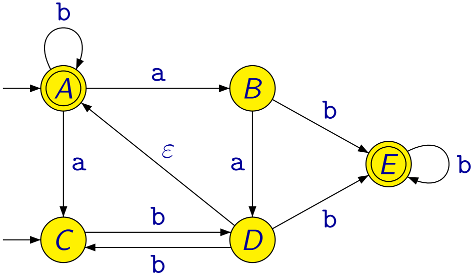
Příklad:



$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow A \mid C \\
A &\rightarrow aB \mid aC \mid bA \\
B &\rightarrow aD \mid bE \\
C &\rightarrow bD \\
D &\rightarrow bC \mid bE \mid A \\
E &\rightarrow bE
\end{aligned}
$$

Převod konečného automatu na bezkontextovou gramatiku

Příklad:

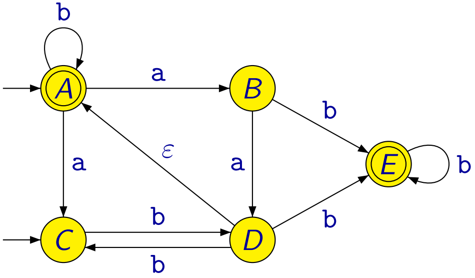


$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow A \mid C \\
A &\rightarrow aB \mid aC \mid bA \\
B &\rightarrow aD \mid bE \\
C &\rightarrow bD \\
D &\rightarrow bC \mid bE \mid A \\
E &\rightarrow bE \\
A &\rightarrow \varepsilon \\
E &\rightarrow \varepsilon
\end{aligned}
$$

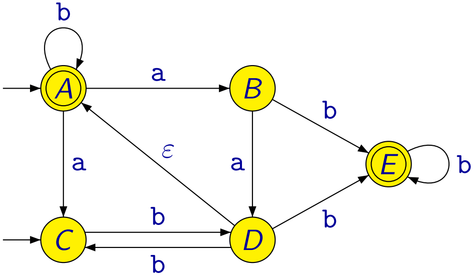
Převod konečného automatu na bezkontextovou gramatiku

Příklad:

Alternativní konstrukce:



Příklad:

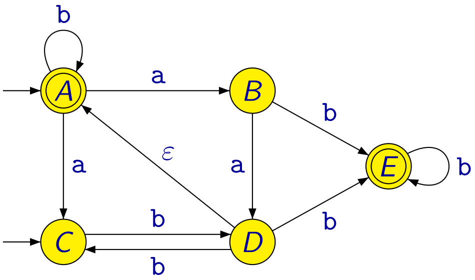


Alternativní konstrukce:

$$S \rightarrow A \mid E$$

Převod konečného automatu na bezkontextovou gramatiku

Příklad:



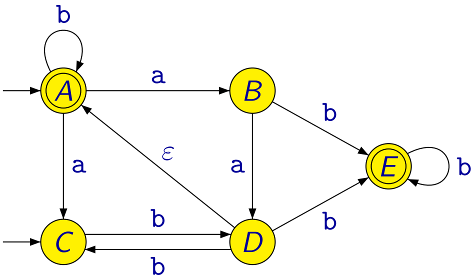
Alternativní konstrukce:

$$S \rightarrow A \mid E$$

$$\begin{aligned} A &\rightarrow Ab \mid D \\ B &\rightarrow Aa \\ C &\rightarrow Aa \mid Db \\ D &\rightarrow Ba \mid Cb \\ E &\rightarrow Bb \mid Db \mid Eb \end{aligned}$$

Převod konečného automatu na bezkontextovou gramatiku

Příklad:



Alternativní konstrukce:

$$S \rightarrow A \mid E$$

$$A \rightarrow Ab \mid D$$
$$B \rightarrow Aa$$
$$C \rightarrow Aa \mid Db$$
$$D \rightarrow Ba \mid Cb$$
$$E \rightarrow Bb \mid Db \mid Eb$$

$$A \rightarrow \varepsilon$$
$$C \rightarrow \varepsilon$$

Regulární gramatiky

Definice

Gramatika $\mathcal{G} = (\Pi, \Sigma, S, P)$ je **pravá regulární gramatika**, jestliže všechna pravidla v P jsou některého z následujících tvarů (kde $A, B \in \Pi$, $a \in \Sigma$):

- $A \rightarrow B$
- $A \rightarrow aB$
- $A \rightarrow \varepsilon$

Definice

Gramatika $\mathcal{G} = (\Pi, \Sigma, S, P)$ je **levá regulární gramatika**, jestliže všechna pravidla v P jsou některého z následujících tvarů (where $A, B \in \Pi$, $a \in \Sigma$):

- $A \rightarrow B$
- $A \rightarrow Ba$
- $A \rightarrow \varepsilon$

Regulární gramatiky

Definice

Gramatika $\mathcal{G}$ je **regulární**, jestliže je pravá regulární nebo levá regulární.

Poznámka: Někdy se též uvádí poněkud obecnější definice pravé (resp. levé) regulární gramatiky, kde jsou povolena pravidla následujících tvarů:

- $A \rightarrow wB$ (resp. $A \rightarrow Bw$)
- $A \rightarrow w$

kde $A, B \in \Pi$, $w \in \Sigma^*$.

Taková pravidla je možné snadno „rozložit“ na pravidla odpovídají dříve uvedené definici.

Příklad: Pravidlo $A \rightarrow abbB$ je možno nahradit pravidly

$$A \rightarrow aX_1 \qquad X_1 \rightarrow bX_2 \qquad X_2 \rightarrow bB$$

kde X_1, X_2 jsou nové neterminály nepoužité nikde jinde v gramatice.

Regulární gramatiky

Tvrzení

Ke každému regulárnímu jazyku L existuje levá regulární gramatika $\mathcal{G}$ taková, že $\mathcal{L}(\mathcal{G}) = L$, a pravá regulární gramatika $\mathcal{G}'$ taková, že $\mathcal{L}(\mathcal{G}') = L$.

Tvrzení

Ke každé regulární gramatice $\mathcal{G}$ existuje konečný automat $\mathcal{A}$ takový, že $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(\mathcal{G})$.