Příklady analýzy složitosti algoritmů

(a příklady technik používaných při návrhu efektivních algoritmů)

Složitost algoritmů

Orientační typické hodnoty velikosti vstupu n, pro které algoritmus s danou časovou složitostí ještě většinou zvládne na „běžném PC" spočítat výsledek ve zlomku sekundy nebo maximálně v řádu sekund.

(Závisí to samozřejmě výrazně na konkrétních detailech. Navíc se zde předpokládá, že v asymptotické notaci nejsou skryty nějaké velké konstanty.)

$O(n)$	$O(n \log n)$	$O(n^2)$	$O(n^3)$
$1\,000\,000 - 100\,000\,000$	$100\,000 - 1\,000\,000$	$1000 - 10\,000$	$100 - 1000$

$2^{O(n)}$	$O(n!)$
$20 - 30$	$10 - 15$

Složitost algoritmů

Při používání asymptotických odhadů časové složitosti algoritmů bychom si měli být vědomi některých úskalí:

- Asyptotické odhady se týkají pouze toho, jak roste čas s rostoucí velikostí vstupu.
- Neříkají nic o konkrétní době výpočtu. V asymptotické notaci mohou být skryty velké konstanty.
- Algoritmus, který má lepší asymptotickou časovou složitost než nějaký jiný algoritmus, může být ve skutečnosti rychlejší až pro nějaké hodně velké vstupy.
- Většinou analyzujeme složitost v nejhorším případě. Pro některé algoritmy může být doba výpočtu v nejhorším případě mnohem větší než doba výpočtu na „typických“ instancích.

Složitost algoritmů

- Můžeme si to ilustrovat na algoritmech pro třídění.

Algoritmus	Nejhorší případ	Průměrný případ
Bubblesort	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$
Heapsort	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$
Quicksort	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n \log n)$

- Quicksort má horší asymptotickou složitost v nejhorším případě než Heapsort, stejnou asymptotickou složitost v průměrném případě a přesto je v praxi nejrychlejší.

Složitost algoritmů

Polynom — funkce tvaru

$$a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_2 n^2 + a_1 n + a_0$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_k$ jsou konstanty.

Příklady polynomů:

$$4n^3 - 2n^2 + 8n + 13 \qquad 2n + 1 \qquad n^{100}$$

Funkce f je **polynomiální**, jestliže je shora omezena nějakým polynomem, tj. jestliže existuje nějaká konstanta k taková, že $f \in O(n^k)$.

Polynomiální jsou například funkce, které patří do následujících tříd:

$$O(n) \qquad O(n \log n) \qquad O(n^2) \qquad O(n^5) \qquad O(\sqrt{n}) \qquad O(n^{100})$$

Složitost algoritmů

Funkce jako 2^n nebo $n!$ polynomiální nejsou — pro libovolně velkou konstantu k platí

$$2^n \in \Omega(n^k) \qquad\qquad n! \in \Omega(n^k)$$

Polynomiální algoritmus — algoritmus, jehož časová složitost je polynomiální (tj. shora omezená nějakým polynomem)

Zhruba se dá říct, že:

- polynomiální algoritmy jsou efektivní algoritmy, které se dají prakticky použít i pro relativně velké vstupy
- algoritmy, které polynomiální nejsou, se dají použít jen pro poměrně malé vstupy

Složitost algoritmů

Rozdělení na polynomiální a nepolynomiální algoritmy je velmi hrubé — nelze kategoricky tvrdit, že polynomiální algoritmy jsou vždy prakticky použitelné a nepolynomiální naopak nikdy nejsou:

- algoritmus se složitostí $\Theta(n^{100})$ pravděpodobně příliš prakticky použitelný nebude,
- některé algoritmy, které nejsou polynomiální, mohou fungovat efektivně pro velkou část vstupů, a složitost větší než polynomiální mají jen kvůli některým problematickým vstupům, na kterých může výpočet trvat velmi dlouhou dobu.

Poznámka: Polynomiální algoritmy, kde by konstanta v exponentu bylo nějaké velké číslo (např. algoritmy se složitostí $\Theta(n^{100})$), se při řešení běžných algoritmických problémů prakticky nevyskytují.

Složitost algoritmů

Pro většinu běžných algoritmických problémů nastává jedna ze tří možností:

- Je znám polynomiální algoritmus se složitostí $O(n^k)$, kde k je nějaké velmi malé číslo (např. 5 a častěji třeba 3 a méně).
- Není znám žádný polynomiální algoritmus a nejlepší známé algoritmy mají složitosti jako třeba $2^{\Theta(n)}$, $\Theta(n!)$ nebo nějaké ještě větší.

  V některých případech může být znám i důkaz, že pro daný problém žádný polynomiální algoritmus neexistuje (tj. nedá se vytvořit).
- Není znám žádný algoritmus, který řeší daný problém (a případně je i dokázáno, že žádný takový algoritmus neexistuje).

Složitost algoritmů

Typický příklad polynomiálního algoritmu — násobení matic s časovou složitostí $\Theta(n^3)$ a paměťovou složitostí $\Theta(n^2)$:

Algoritmus: Násobení matic

```
MATRIX-MULT (A, B, C, n):
    for i := 1 to n do
        for j := 1 to n do
            x := 0
            for k := 1 to n do
                x := x + A[i][k] * B[k][j]
            C[i][j] := x
```

Složitost algoritmů

- Při hrubé analýze složitosti často stačí spočítat počet do sebe vnořených smyček — a tento počet pak udává stupeň polynomu

  Příklad: Tři vnořené cykly při násobení matic — časová složitost algoritmu je $O(n^3)$.

- Pokud neprobíhají všechny smyčky např. od 0 do n, ale počet průchodů vnitřními smyčkami se při různých iteracích vnější smyčky mění, podrobnější analýza může být komplikovanější.

  Většinou to pak vede na počítání součtů různých typů číselných řad (např. aritmetické, geometrické, apod.).

  Často dá taková podrobnější analýza podobný výsledek jako hrubá analýza, mnohdy však může být složitost zjištěná touto podrobnější analýzou podstatně nižší než by vyplývalo z hrubého odhadu.

Aritmetická posloupnost

Aritmetická posloupnost — číselná řada $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, kde

$$a_i = a_0 + i \cdot d,$$

kde d je nějaká konstanta nezávistlá na i.

V aritmetické posloupnosti tedy pro všechna i platí $a_{i+1} = a_i + d$.

Příklad: Aritmetická posloupnost, kde $a_0 = 1$, $d = 1$ a $n = 100$:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ \ldots\ , 96, 97, 98, 99, 100$$

Součet aritmetické posloupnosti:

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i \ = \ a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} \ = \ \frac{1}{2} n \left(a_0 + a_{n-1} \right)$$

Aritmetická posloupnost

Příklad:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \Theta(n^2)$$

Konkrétně například pro $n = 100$ je

$$1 + 2 + \cdots + 100 = 50 \cdot 101 = 5050.$$

Aritmetická posloupnost

Důkaz: Označme

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} a_i = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}$$

$$\begin{aligned}
2s &= s + s \\
&= (a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}) + (a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}) \\
&= (a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}) + (a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_0) \\
&= (a_0 + a_{n-1}) + (a_1 + a_{n-2}) + \cdots + (a_{n-1} + a_0) \\
&= ((a_0 + 0 \cdot d) + (a_0 + (n-1) \cdot d)) + ((a_0 + 1 \cdot d) + (a_0 + (n-2) \cdot d)) + \\
&\quad \cdots + ((a_0 + (n-1) \cdot d) + (a_0 + 0 \cdot d)) \\
&= n \cdot (a_0 + a_0 + (n-1) \cdot d) \\
&= n \cdot (a_0 + a_{n-1})
\end{aligned}$$

Aritmetická posloupnost

Příklad: $s = 1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100$

$$
\begin{aligned}
2s &= s + s \\
&= (1 + 2 + \cdots + 100) + (1 + 2 + \cdots + 100) \\
&= (1 + 2 + \cdots + 100) + (100 + 99 + \cdots + 1) \\
&= (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \cdots + (99 + 2) + (100 + 1) \\
&= 100 \cdot (1 + 100) = 10100
\end{aligned}
$$

Takže

$$
s = \frac{1}{2} \cdot 10100 = 5050
$$

Geometrická posloupnost

Geometrická posloupnost — číselná řada $a_0, a_1, \ldots, a_n$, kde

$$a_i = a_0 \cdot q^i,$$

kde q je nějaká konstanta nezávistlá na i.

V geometrické posloupnosti tedy pro všechna i platí $a_{i+1} = a_i \cdot q$.

Příklad: Geometrická posloupnost, kde $a_0 = 1$, $q = 2$ a $n = 14$:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384$$

Součet geometrické posloupnosti (kde $q \neq 1$):

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = a_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

Geometrická posloupnost

Příklad:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n \;=\; \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

Speciálně pro $q = 2$:

$$1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n \;=\; \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} \;=\; 2 \cdot 2^n - 1 \;=\; \Theta(2^n)$$

Geometrická posloupnost

Důkaz: Označme

$$s = \sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

$$\begin{aligned}
s &= a_0 \cdot q^0 + a_0 \cdot q^1 + \cdots + a_0 \cdot q^n \\
s \cdot q &= \left(a_0 \cdot q^0 + a_0 \cdot q^1 + \cdots + a_0 \cdot q^n\right) \cdot q \\
&= a_0 \cdot q^1 + a_0 \cdot q^2 + \cdots + a_0 \cdot q^{n+1} \\
s \cdot q - s &= a_0 \cdot q^{n+1} - a_0 \cdot q^0 \\
s \cdot (q-1) &= a_0 \cdot (q^{n+1} - 1) \\
s &= a_0 \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}
\end{aligned}$$

Exponenciální funkce: funkce tvaru c^n, kde c je konstanta — např. funkce 2^n

Logaritmus — inverzní funkce k exponenciální funkci: pro dané n je

$$\log_c n$$

taková hodnota x, že $c^x = n$.

Složitost algoritmů

n	2^n
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024
11	2048
12	4096
13	8192
14	16384
15	32768
16	65536
17	131072
18	262144
19	524288
20	1048576

n	$\lceil \log_2 n \rceil$
0	—
1	0
2	1
3	2
4	2
5	3
6	3
7	3
8	3
9	4
10	4
11	4
12	4
13	4
14	4
15	4
16	4
17	5
18	5
19	5
20	5

n	$\log_2 n$
1	0
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6
128	7
256	8
512	9
1024	10
2048	11
4096	12
8192	13
16384	14
32768	15
65536	16
131072	17
262144	18
524288	19
1048576	20

Složitost algoritmů

Příklady toho, kde se při analýze algoritmů objevují exponenciální funkce a logaritmy:

- Nějaká hodnota se opakovaně zmenšuje na polovinu nebo naopak zdvojnásobuje.

  Například u **binárního vyhledávání** (metodou půlení intervalu) se s každou iterací cyklu zmenšuje velikost intervalu na polovinu.

  Předpokládejme, že pole má velikost n.

  Jaká je minimální velikost pole n, při které se provede alespoň k iterací?

  Odpověď: 2^k

  Platí tedy $k = \log_2(n)$. Časová složitost algoritmu je pak $\Theta(\log n)$.

Složitost algoritmů

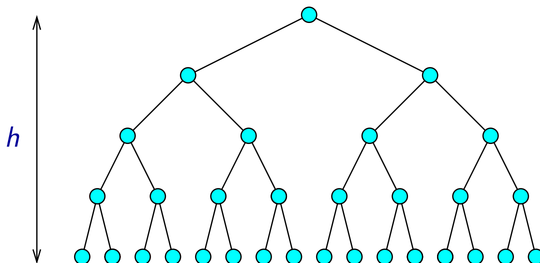
- Pomocí n bitů je možno reprezentovat čísla od 0 do $2^n - 1$.
- Minimální počet bitů potřebných pro uložení přirozeného čísla x reprezentovaného binárně je

$$\lceil \log_2(x+1) \rceil.$$

- Dokonale vyvážený binární strom o výšce h má $2^{h+1} - 1$ vrcholů, z čehož 2^h jsou listy.
- Dokonale vyvážený binární strom o n vrcholech má výšku zhruba $\log_2 n$.

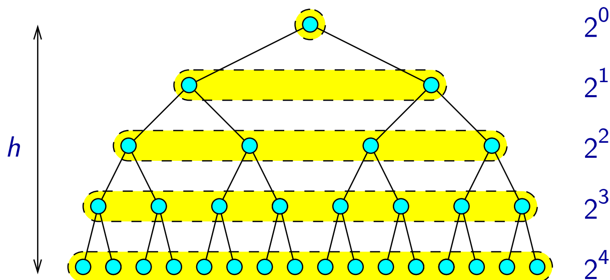
  Ilustrační příklad: Kdybychom nakreslili vyvážený strom o $n = 1\,000\,000$ vrcholech tak, aby sousední vrcholy byly vzdáleny o 1 cm a výška každé vrstvy byla také 1 cm, měl by tento strom na šířku 10 km a na výšku zhruba 20 cm.

Dokonale vyvážený binární strom výšky h:



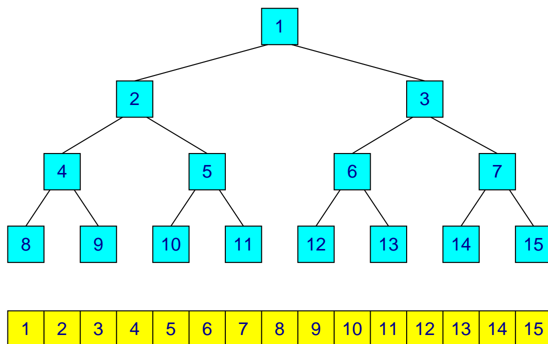
Složitost algoritmů

Dokonale vyvážený binární strom výšky h:

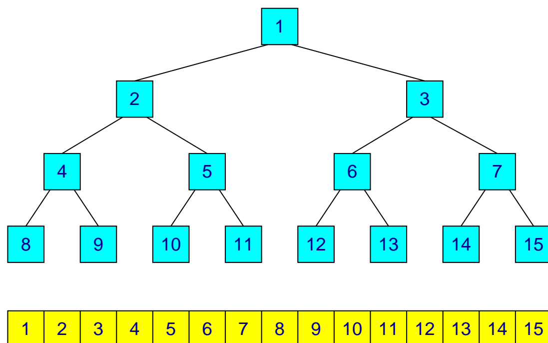


Složitost algoritmů

Efektivní uložení úplného binárního stromu v poli:



Efektivní uložení úplného binárního stromu v poli:



Potomci vrcholu s indexem i mají indexy $2i$ a $2i+1$.
Rodič vrcholu s indexem i má index $\lfloor i/2 \rfloor$.

Složitost algoritmů

Halda (**heap**) — úplný binární strom uložený v poli A výše uvedeným způsobem, kde navíc pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ platí:

- pokud $2i \leq n$, pak $A[i] \leq A[2i]$
- pokud $2i + 1 \leq n$, pak $A[i] \leq A[2i + 1]$

Příklady využití haldy:

- třídící algoritmus **HeapSort**
- efektivní implementace **prioritní fronty** — umožňuje provádět většinu operací na této frontě s časovou složitostí v $O(\log n)$, kde n je počet prvků ve frontě

Složitost algoritmů

Algoritmus: Vytvoření haldy z nesetříděného pole

```
CREATE-HEAP (A, n):
    i := ⌊n/2⌋
    while i ≥ 1 do
        j := i
        x := A[j]
        while 2 * j ≤ n do
            k := 2 * j
            if k + 1 ≤ n and A[k + 1] < A[k] then
                k := k + 1
            if x ≤ A[k] then break
            A[j] := A[k]
            j := k
        A[j] := x
        i := i − 1
```

Složitost algoritmů

Časová složitost algoritmu Create-Heap:

- Rychlou a hrubou analýzou lehce zjistíme, že tato složitost je v $O(n \log n)$ a v $\Omega(n)$:
  - Vnější cyklus se provede vždy $\lfloor n/2 \rfloor$ krát — počet průchodů je tedy v $\Theta(n)$.
  - Počet průchodů vnitřním cyklem v rámci jedné iterace vnějšího cyklu je očividně v $O(\log n)$.
- Daleko méně zřejmé je, že celkový počet průchodů vnitřním cyklem (tj. dohromady přes všechny iterace vnějšího cyklu) je ve skutečnosti v $O(n)$.

Celkově tedy dostáváme:

Časová složitost algoritmu Create-Heap je v $\Theta(n)$.

Zdůvodnění toho, proč je počet průchodů vnitřním cyklem v $O(n)$:

Předpokládejme pro jednoduchost, že všechny větve stromu jsou stejně dlouhé a mají délku h — platí tedy $n = 2^{h+1} - 1$.

Označme C_i, kde $0 \leq i < h$, celkový počet průchodů vnitřním cyklem, kdy je na začátku cyklu hodnota j v i-té vrstvě stromu (vrstvy jsou číslovány odshora $0, 1, 2, \ldots$).

Zjevně je celkový počet průchodů s dán vztahem

$$s = C_{h-1} + C_{h-2} + \cdots + C_0 = \sum_{i=0}^{h-1} C_i$$

Hodnotu C_i spočítáme jako celkový počet vrcholů ve vstvách $0, 1, \ldots, i$:

$$C_i = 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^i = \sum_{k=0}^{i} 2^k = \frac{2^{i+1} - 1}{2 - 1} = 2^{i+1} - 1$$

Celkový součet pak spočítáme následovně:

$$
\begin{aligned}
s &= \sum_{i=0}^{h-1} C_i = \sum_{i=0}^{h-1} (2^{i+1} - 1) = 2 \cdot \Big(\sum_{i=0}^{h-1} 2^i \Big) - \Big(\sum_{i=0}^{h-1} 1 \Big) \\
&= 2 \cdot \frac{2^h - 1}{2 - 1} - h = 2^{h+1} - 2 - h = n - 1 - h = O(n)
\end{aligned}
$$

Rekurzivní algoritmy

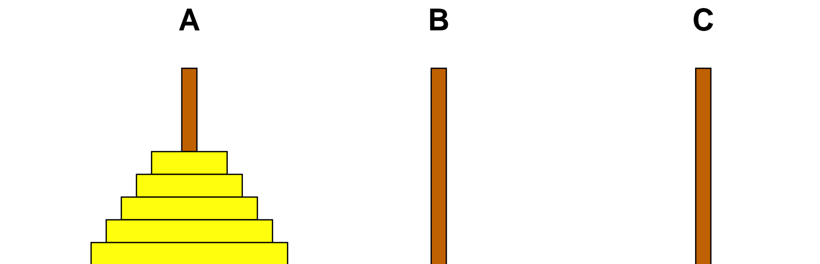
Rekurzivní algoritmus je algoritmus, který převede řešení původního problému na řešení několika podobných problémů pro menší instance.

Obecné schéma rekurzivních algoritmů:

- Pokud se jedná o elementární případ, vyřeš ho přímo a vrať výsledek.
- V opačném případě vytvoř instance podproblémů.
- Zavolej sám sebe pro každou z těchto instancí.
- Z výsledků pro jednotlivé podproblémy slož řešení původního problému a vrať ho jako výsledek.

Poznámka: Instance podproblémů musí vždy být v nějakém smyslu menší než instance původního problému. Často (ne však vždy) se zmenšuje velikost instance.

Hanojské věže



Úkol: Přemístit disky z A na B, přičemž:

- V jednom okamžiku je možné přesouvat jen jeden disk.
- Není dovaleno položit větší disk na menší.

Hanojské věže

$n = 1:$

$A \to B$

Hanojské věže

$n = 1:$

$A \to B$

$n = 2:$

$A \to C$

$A \to B$

$C \to B$

Hanojské věže

$n = 1:$

$A \to B$

$n = 2:$

$A \to C$
$A \to B$
$C \to B$

$n = 3:$

$A \to B$
$A \to C$
$B \to C$
$A \to B$
$C \to A$
$C \to B$
$A \to B$

Hanojské věže

$n = 1:$

$A \to B$

$n = 2:$

$A \to C$
$A \to B$
$C \to B$

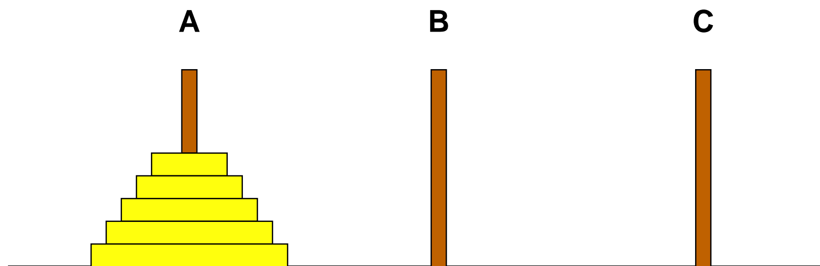
$n = 3:$

$A \to B$
$A \to C$
$B \to C$
$A \to B$
$C \to A$
$C \to B$
$A \to B$

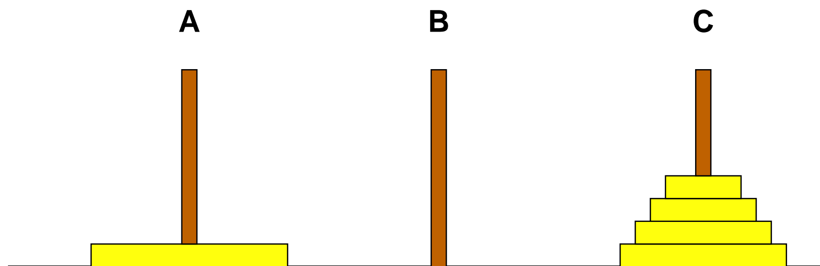
$n = 4:$

$A \to C$
$A \to B$
$C \to B$
$A \to C$
$B \to A$
$B \to C$
$A \to C$
$A \to B$
$C \to B$
$C \to A$
$B \to A$
$C \to B$
$A \to C$
$A \to B$
$C \to B$

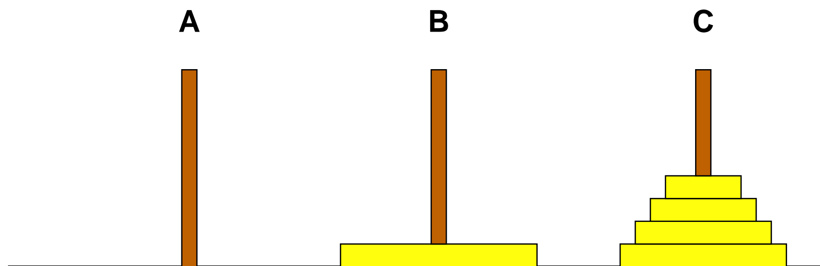
Hanojské věže



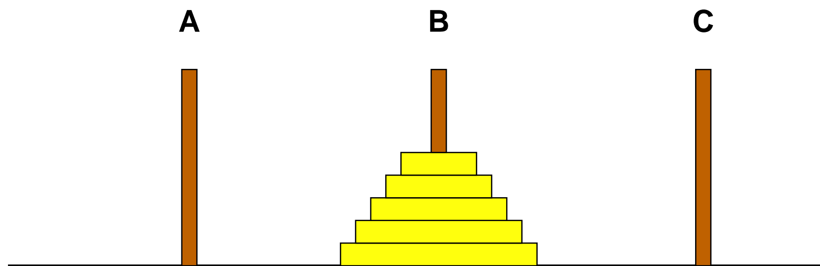
Hanojské věže



Hanojské věže



Hanojské věže



Hanojské věže

Algoritmus: Hanojské věže

```
HANOI (n, src, dst, tmp):
    if n = 0 then return
    HANOI (n − 1, src, tmp, dst)
    print (src, "→", dst)
    HANOI (n − 1, tmp, dst, src)

MAIN (n):
    HANOI (n, "A", "B", "C")
```

Označme $P(n)$ počet tahů, které provede algoritmus pro n disků.

Tvrzení

$P(n) = 2^n - 1$.

Důkaz:

- Pro $n = 0$: $P(n) = 0 = 2^0 - 1$
- Pro $n > 0$: Předpokládáme, že $P(n-1) = 2^{n-1} - 1$.

$$
\begin{aligned}
P(n) &= 2P(n-1) + 1 = \\
&= 2(2^{n-1} - 1) + 1 = \\
&= 2 \cdot 2^{n-1} - 2 + 1 = \\
&= 2^n - 1
\end{aligned}
$$

Hanojské věže

Tvrzení

Pro přesun n disků je třeba minimálně $2^n - 1$ tahů.

Důkaz:

Indukcí.

Uvedený algoritmus nalezne tedy optimální řešení.

Poznámka

Otázka: Jak dlouho by trvalo přesunutí 64 disků, pokud by přesunutí jednoho disku trvalo 1 s ?

Hanojské věže

Tvrzení

Pro přesun n disků je třeba minimálně $2^n - 1$ tahů.

Důkaz:

Indukcí.

Uvedený algoritmus nalezne tedy optimální řešení.

Poznámka

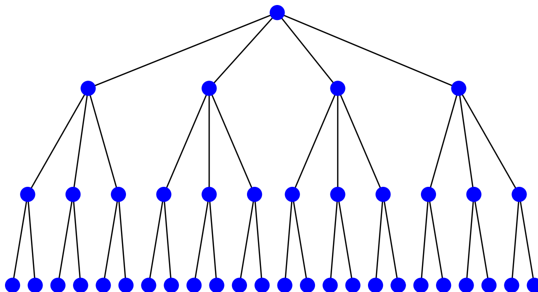
Otázka: Jak dlouho by trvalo přesunutí 64 disků, pokud by přesunutí jednoho disku trvalo 1 s ?

Odpověď: 18446744073709551615 s, tj. asi 585 miliard let.

Rekurzivní algoritmy

Výpočet rekurzivního algoritmu je možné znázornit jako strom:

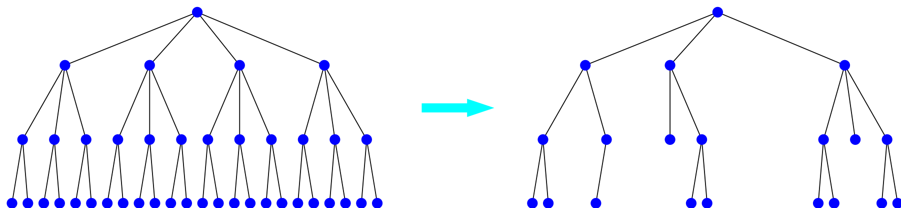
- vrcholy stromu odpovídají jednotlivým podproblémům
- kořen je původní problém
- potomci vrcholu odpovídají podproblémům daného problému



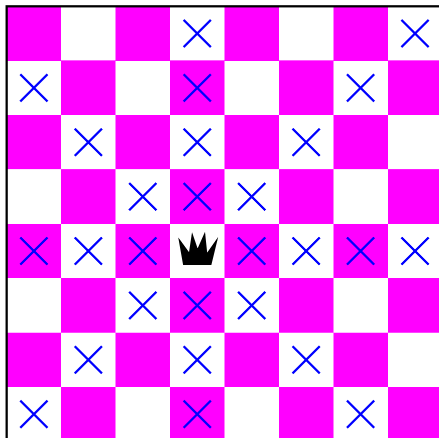
Pruning

Přístup, kdy do rekurzivním algoritmu doplníme nějaké vhodné testy, které způsobí, že se rekurzivní procedura nebude volat pro některé podproblémy, u kterých je jisté, že jejich vyřešení nepovede k řešení celého problému, se nazývá **pruning**.

Čím více větví stromu tímto způsobem odstraníme, tím lépe.



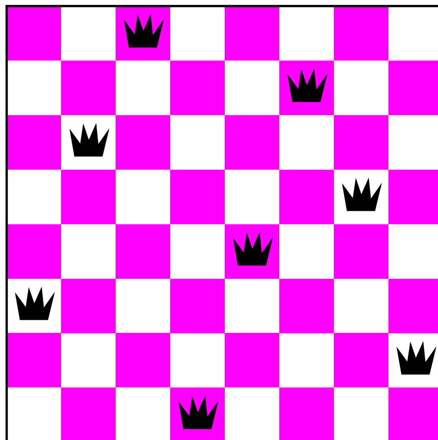
Problém osmi dam



Problém: Najít všechny možnosti, jak rozmístit n dam na šachovnici velikosti $n \times n$ tak, aby se žádné dvě dámy navzájem neohrožovaly.

Problém osmi dam

Jedno z možných řešení.



Problém osmi dam

Vstupem je číslo n.

Algoritmus bude používat následující pole:

- Y — s indexy $0 \mathinner{\ldotp\ldotp} n-1$, hodnota $Y[i]$ udává pro dámu ve sloupci i číslo řádku, na kterém se nachází
- A — s indexy $0 \mathinner{\ldotp\ldotp} n-1$, booleovská hodnota $A[j]$ udává, jestli je řádek j obsazený
- B — s indexy $0 \mathinner{\ldotp\ldotp} 2n-2$, booleovská hodnota $B[k]$ udává, jestli je diagonála k ve směru $\nearrow$ obsazená
- C — s indexy $-(n-1) \mathinner{\ldotp\ldotp} +(n-1)$, booleovská hodnota $C[k]$ udává, jestli je diagonála k ve směru $\searrow$ obsazená

Prohledávání se spustí zavoláním $\textsc{Search}(0)$.

Problém osmi dam

Algoritmus: Rozmístění n dam na šachovnici

```
SEACH(k):
    if k = n then
        PRINT-SOLUTION()
        return
    for i := 0 to n − 1 do
        i₂ := k + i; i₃ := k − i
        if ¬A[i] and ¬B[i₂] and ¬C[i₃] then
            Y[k] := i
            A[i] := TRUE; B[i₂] := TRUE; C[i₃] := TRUE
            SEARCH(k + 1)
            A[i] := FALSE; B[i₂] := FALSE; C[i₃] := FALSE
```

Problém osmi dam

	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	4
2	2	3	4	5
3	3	4	5	6

x+y

	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	–1	0	1	2
2	–2	–1	0	1
3	–3	–2	–1	0

x–y

Rekurzivní algoritmy

- Uvedený algoritmus pro rozmístění n dam na šachovnici je příkladem **prohledávání s návratem** (**backtracking**).
- I při použití pruningu má tento typ algoritmů většinou exponenciální složitost.
- Obecně rekurzivní algoritmy, které převádí řešení problému velikosti n na dva nebo více problémů velikosti $n - 1$, mívají většinou exponenciální složitost.
- Pokud rekurzivní algoritmus převádí řešení problému velikosti n na řešení problémů velikosti $n/2$, složitost může být (a často bývá) polynomiální.

  Tento postup může někdy vést k řešením, která mohou být efektivnější než nějaké přímočaré řešení.

Příklad: Algoritmus MERGE-SORT.

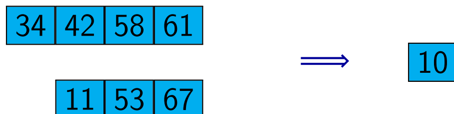
Hlavní myšlenka algoritmu: Dvě setříděné posloupnosti snadno spojíme do jediné setříděné posloupnosti.
Pokud mají obě posloupnosti dohromady n prvků, vyžaduje tato operace n kroků.

34	42	58	61

10	11	53	67

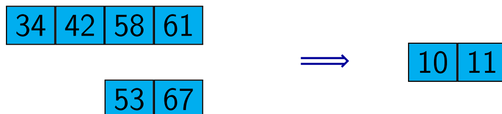
Příklad: Algoritmus MERGE-SORT.

Hlavní myšlenka algoritmu: Dvě setříděné posloupnosti snadno spojíme do jediné setříděné posloupnosti.
Pokud mají obě posloupnosti dohromady n prvků, vyžaduje tato operace n kroků.



Příklad: Algoritmus MERGE-SORT.

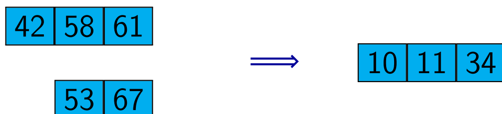
Hlavní myšlenka algoritmu: Dvě setříděné posloupnosti snadno spojíme do jediné setříděné posloupnosti.
Pokud mají obě posloupnosti dohromady n prvků, vyžaduje tato operace n kroků.



Příklad: Algoritmus Merge-Sort.

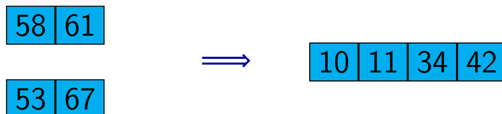
Hlavní myšlenka algoritmu: Dvě setříděné posloupnosti snadno spojíme do jediné setříděné posloupnosti.

Pokud mají obě posloupnosti dohromady n prvků, vyžaduje tato operace n kroků.



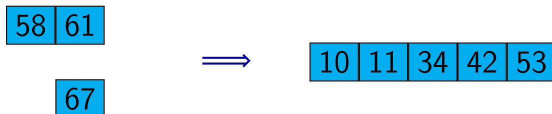
Příklad: Algoritmus MERGE-SORT.

Hlavní myšlenka algoritmu: Dvě setříděné posloupnosti snadno spojíme do jediné setříděné posloupnosti.
Pokud mají obě posloupnosti dohromady n prvků, vyžaduje tato operace n kroků.



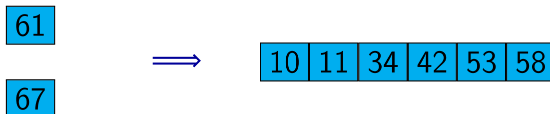
Příklad: Algoritmus MERGE-SORT.

Hlavní myšlenka algoritmu: Dvě setříděné posloupnosti snadno spojíme do jediné setříděné posloupnosti.
Pokud mají obě posloupnosti dohromady n prvků, vyžaduje tato operace n kroků.



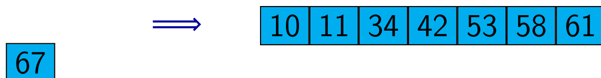
Příklad: Algoritmus MERGE-SORT.

Hlavní myšlenka algoritmu: Dvě setříděné posloupnosti snadno spojíme do jediné setříděné posloupnosti.
Pokud mají obě posloupnosti dohromady n prvků, vyžaduje tato operace n kroků.



Příklad: Algoritmus MERGE-SORT.

Hlavní myšlenka algoritmu: Dvě setříděné posloupnosti snadno spojíme do jediné setříděné posloupnosti.
Pokud mají obě posloupnosti dohromady n prvků, vyžaduje tato operace n kroků.



Příklad: Algoritmus MERGE-SORT.

Hlavní myšlenka algoritmu: Dvě setříděné posloupnosti snadno spojíme do jediné setříděné posloupnosti.
Pokud mají obě posloupnosti dohromady n prvků, vyžaduje tato operace n kroků.

10	11	34	42	53	58	61	67

Složitost algoritmů

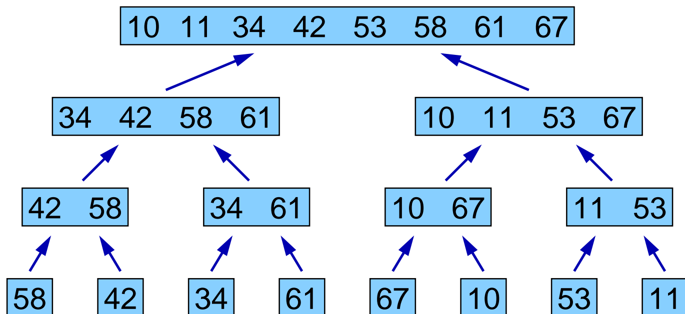
Algoritmus: Merge sort

```
Merge-Sort (A, p, r):
    if r − p > 1 then
        q := ⌊(p + r) / 2⌋
        Merge-Sort(A, p, q)
        Merge-Sort(A, q, r)
        Merge(A, p, q, r)
```

Pro setřídění pole A, které obsahuje prvky $A[0], A[1], \cdots, A[n-1]$, zavoláme $\textsc{Merge-Sort}(A, 0, n)$.

Poznámka: Procedura $\textsc{Merge}(A, p, q, r)$ spojí setříděné posloupnosti uložené v $A[p \,..\, q-1]$ a $A[q \,..\, r-1]$ do jedné posloupnosti uložené v $A[p \,..\, r-1]$.

Vstup: 58, 42, 34, 61, 67, 10, 53, 11



Strom rekurzivních volání má $\Theta(\log n)$ úrovní. Na každé úrovni se provede $\Theta(n)$ operací. Časová složitost algoritmu MERGE-SORT je $\Theta(n \log n)$.

The master theorem

Master theorem

Předpokládejme, že $a \geq 1$ a $b > 1$ jsou konstanty, že $f(n)$ je funkce a že funkce $T(n)$ je definována rekurentním předpisem

$$T(n) \;=\; a \cdot T(n/b) + f(n)$$

(kde n/b může být buď $\lfloor n/b \rfloor$ nebo $\lceil n/b \rceil$). Pak platí:

a. Pokud $f(n) \in O(n^{\log_b a - \epsilon})$ pro nějakou konstantu $\epsilon > 0$, pak $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.
b. Pokud $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$, pak $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$.
c. Pokud $f(n) \in \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ pro nějakou konstantu $\epsilon > 0$ a pokud $a \cdot f(n/b) \leq c \cdot f(n)$ pro nějakou konstantu $c < 1$ a všechna dostatečně velká n, pak $T(n) = \Theta(f(n))$.

The master theorem

Master theorem je možné použít pro analýzu složitosti libovolného rekurzivního algoritmu, kde:

- Řešení jednoho podproblému velikosti n, kde $n > 1$, se převede na řešení a podproblémů, z nichž každý má velikost n/b.
- Doba, která stráví řešením jednoho podproblému velikosti n, nepočítaje v to dobu, která se stráví v rekurzivních voláních, je určená funkcí $f(n)$.

Příklad: Algoritmus MERGE-SORT: $a = 2$, $b = 2$, $f(n) \in \Theta(n)$

(v rámci jednoho volání — dva podproblémy, každý velikosti $n/2$, spojení dvou setříděných sekvencí v čase $\Theta(n)$)

Platí $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n)$, takže

$$T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \log n) = \Theta(n \log n).$$

The master theorem

Příklad: Násobení čtvercových matic A a B velikosti $n \times n$ rekurzivním způsobem:

- Pro $n = 1$ se výsledek spočítá přímo.
- Pro $n > 1$ se každá z matic A a B rozloží na čtyři podmatice velikosti $(n/2) \times (n/2)$.
- Výsledek se poskládá pomocí sčítání a násobení těchto osmi menších matic. Pro násobení těchto menších matic se funkce zavolá rekurzivně.
- Přímočarý způsob vyžaduje 8 násobení matic velikosti $(n/2) \times (n/2)$.

  Máme tedy $a = 8$, $b = 2$, $f(n) \in \Theta(n^2)$.

  Platí $f(n) \in O(n^{\log_b a - \epsilon})$, protože $n^2 \in O(n^{\log_2 8 - \epsilon}) = O(n^{3-\epsilon})$ platí např. pro $\epsilon = 1$.

  Takže $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^{\log_2 8}) = \Theta(n^3)$.

Tento postup tedy není lepší než standardní jednoduchý algoritmus pro násobení matic.

The master theorem

Existuje však chytrý způsob, jak výše uvedené provést komplikovanějším způsobem tak, že v rámci jednoho rekurzivního volání postačí rekurzivně volat funkci 7 krát
(za cenu většího počtu sčítání a odčítání).

Jedná se o tzv. **Strassenův algoritmus**.

Zde je $a = 7$, $b = 2$ a $f(n) \in \Theta(n^2)$.

Opět platí $f(n) \in O(n^{\log_b a - \epsilon})$, protože $n^2 \in O(n^{\log_2 7 - \epsilon})$ platí např. pro $\epsilon = 0.5$.

($\log_2 7$ je přibližně 2.80735)

Takže $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^{\log_2 7})$ a tedy $T(n) \in O(n^{2.81})$.

Důkaz master theoremu:

Pro jednoduchost se omezíme jen na případy, kdy $f(n) = n^c$ pro nějakou konstantu $c > 0$.

Rovněž pro jednoduchost předpokládejme, že n je mocninou čísla b, ať nemusíme řešit zaokrouhlování.

Představme si strom rekurzivních volání pro instanci velikosti n:

- Výška stromu je $\log_b n$.
- Počty vrcholů na jednotlivých úrovních jsou $a^0, a^1, \ldots, a^{\log_b n}$
- Čas, který se stráví v jednom vrcholu na úrovni i je

$$f\left(\frac{n}{b^i}\right) = \left(\frac{n}{b^i}\right)^c$$

The master theorem

Platí tedy

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_b n} a^i \cdot f\left(\frac{n}{b^i}\right) = \sum_{i=0}^{\log_b n} a^i \cdot \left(\frac{n}{b^i}\right)^c = n^c \cdot \sum_{i=0}^{\log_b n} \left(\frac{a}{b^c}\right)^i$$

Označme $q = a/b^c$. Je třeba rozlišit tři případy:

- $q > 1$ — tj. když platí $a > b^c$, neboli $c < \log_b a$
- $q = 1$ — tj. když platí $a = b^c$, neboli $c = \log_b a$
- $q < 1$ — tj. když platí $a < b^c$, neboli $c > \log_b a$

The master theorem

Případ $q > 1$ — tj. když platí $a > b^c$, neboli $c < \log_b a$:

$$T(n) = n^c \cdot \sum_{i=0}^{\log_b n} \left(\frac{a}{b^c}\right)^i = n^c \cdot \frac{q^{\log_b n+1} - 1}{q - 1} \in \Theta(n^c \cdot q^{\log_b n})$$

Platí

$$\begin{aligned} n^c \cdot q^{\log_b n} &= n^c \cdot \left(\frac{a}{b^c}\right)^{\log_b n} = n^c \cdot n^{\log_b\left(\frac{a}{b^c}\right)} \\ &= n^c \cdot n^{\log_b a - \log_b(b^c)} = n^{c+\log_b a - c} = n^{\log_b a} \end{aligned}$$

Platí tedy $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$.

Poznámka: Počet listů stromů (tj. podproblémů velikosti 1) je $a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$.

Většina času se tedy tráví řešením těchto elementárních případů.

The master theorem

Případ $q = 1$ — tj. když platí $a = b^c$, neboli $c = \log_b a$:

$$T(n) = n^c \cdot \sum_{i=0}^{\log_b n} \left(\frac{a}{b^c}\right)^i = n^c \cdot \sum_{i=0}^{\log_b n} 1 = n^c \cdot (\log_b n + 1) \in \Theta(n^{\log_b a} \log n)$$

Poznámka: V každé vrstvě stromu se stráví zhruba stejný čas $\Theta(n^{\log_b a})$. Vrstev je celkem $\Theta(\log n)$.

The master theorem

Případ $q < 1$ — tj. když platí $a < b^c$, neboli $c > \log_b a$:

$$T(n) = n^c \cdot \sum_{i=0}^{\log_b n} \left(\frac{a}{b^c}\right)^i < n^c \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{a}{b^c}\right)^i = n^c \cdot \frac{1}{1-q} \in O(n^c)$$

protože pro q, kde $0 < q < 1$, platí

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \lim_{z\to\infty} \sum_{i=0}^{z} q^i = \lim_{z\to\infty} \frac{q^{z+1}-1}{q-1} = \frac{1}{1-q}$$

Zjevně platí $T(n) \in \Omega(n^c)$ (protože už v samotném kořeni se stráví čas $\Theta(n^c)$), takže celkově platí $T(n) \in \Theta(n^c)$.

Poznámka: Většina času se v tomto případě stráví v kořeni stromu.

Dynamické programování

Definice

Slovo $v = a_1 a_2 \ldots a_n$ nad abecedou Σ (kde všechna $a_i \in \Sigma$) je **podsekvencí** slova $w \in \Sigma^*$, jestliže existují slova $u_0, u_1, \ldots, u_n \in \Sigma^*$ taková, že

$$w = u_0\, a_1\, u_1\, a_2\, u_2 \cdots u_{n-1}\, a_n\, u_n$$

Příklad: Slovo `bcba` je podsekvencí slova `abcbdcab`.

Nejdelší společná podsekvence (**longest common subsequence**) slov u a v je nejdelší slovo w, které je podsekvencí slova u a zároveň podsekvencí slova v.

Příklad: Nejdelší společnou podsekvencí slov `abcbdab` a `bdcaba` je slovo `bcba`.

Poznámka: Nejdelší společná podsekvence vždy existuje, ale ne vždy je dána jednoznačně — např. pro `aaabb` a `bbbaa` je to `aa` i `bb`.

Problém: Nejdelší společná podsekvence

Vstup: Slova u a v nad abecedou Σ.

Výstup: Nejdelší slovo w, které je podsekvencí slova u a zároveň podsekvencí slova v.

Předpokládejme, že:

- slova u a v jsou uložena v polích A a B indexovaných od jedné
- hodnoty m a n udávají délku slov u a v

Tj. pokud $u = a_1 a_2 \cdots a_m$ a $v = b_1 b_2 \cdots b_n$, tak:

- prvky $A[1], A[2], \ldots, A[m]$ obsahují symboly $a_1, a_2, \ldots, a_m$
- prvky $B[1], B[2], \ldots, B[n]$ obsahují symboly $b_1, b_2, \ldots, b_n$

Dynamické programování

Zaměřme se nejprve na problém, zjistit pro daná slova u a v, jaká je délka jejich nejdelší společné podsekvence.

Můžeme řešit rekurzivně podproblémy následujícího typu:

- $\textsc{Lcs-len}(i, j)$ — pro dané i a j, kde $0 \le i \le m$ a $0 \le j \le n$, vrátí délku nejdelší společné podsekvence prefixu slova u délky i a prefixu slova v délky j.

  Tj. $\textsc{Lcs-len}(i, j)$ vrátí délku nejdelší společné podsekvence slov uložených v

  $$A[1], A[2], \ldots, A[i] \qquad \text{a} \qquad B[1], B[2], \ldots, B[j]$$

Délku nejdelší společné podsekvence slov u a v pak můžeme zjistit pomocí $\textsc{Lcs-len}(m, n)$.

Rekurzivní řešení:

$$\textsc{Lcs-len}(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } i = 0 \text{ nebo } j = 0 \\ \textsc{Lcs-len}(i-1,j-1)+1 & \text{pokud } A[i] = B[j] \\ \max(\textsc{Lcs-len}(i-1,j), \\ \qquad \textsc{Lcs-len}(i,j-1)) & \text{pokud } A[i] \neq B[j] \end{cases}$$

Dynamické programování

Rekurzivní řešení:

$$\textsc{Lcs-len}\,(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } i = 0 \text{ nebo } j = 0 \\ \textsc{Lcs-len}\,(i-1, j-1) + 1 & \text{pokud } A[i] = B[j] \\ \max(\textsc{Lcs-len}\,(i-1, j), & \\ \qquad \textsc{Lcs-len}\,(i, j-1)) & \text{pokud } A[i] \neq B[j] \end{cases}$$

Toto řešení má očividně exponenciální časovou složitost.

Ve skutečnosti potřebujeme řešit jen $(m+1)\cdot(n+1)$ **různých** podproblémů (protože $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$ a $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$).

Výsledky řešení jednotlivých podproblémů si můžeme ukládat do tabulky a nemusíme je řešit opakovaně.

Dynamické programování

Algoritmus: Nalezení nejdelší společné podsekvence — vyplnění tabulky

```
LCS-COMP (A, m, B, n):
    for i := 0 to m do C[i][0] := 0
    for j := 1 to n do C[0][j] := 0
    for i := 1 to m do
        for j := 1 to n do
            if A[i] = B[j] then
                C[i][j] := C[i − 1][j − 1] + 1; D[i][j] := "↖"
            else
                if C[i − 1][j] ≤ C[i][j − 1] then
                    C[i][j] := C[i − 1][j]; D[i][j] := "↑"
                else
                    C[i][j] := C[i][j − 1]; D[i][j] := "←"
```

Složitost algoritmu je $O(m \cdot n)$.

i \ j		0	1	2	3	4	5	6
			b	d	c	a	b	a
0		0	0	0	0	0	0	0
1	a	0	↑ 0	↑ 0	↑ 0	↖ 1	← 1	↖ 1
2	b	0	↖ 1	← 1	← 1	↑ 1	↖ 2	← 2
3	c	0	↑ 1	↑ 1	↖ 2	← 2	↑ 2	↑ 2
4	b	0	↖ 1	↑ 1	↑ 2	↑ 2	↖ 3	← 3
5	d	0	↑ 1	↖ 2	↑ 2	↑ 2	↑ 3	↑ 3
6	a	0	↑ 1	↑ 2	↑ 2	↖ 3	↑ 3	↖ 4
7	b	0	↖ 1	↑ 2	↑ 2	↑ 3	↖ 3	↑ 4

Dynamické programování

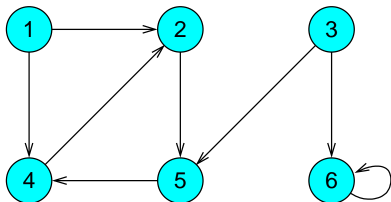
Dynamické programování:

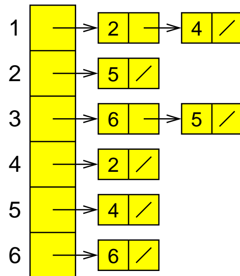
- Pokud máme rekurzivní řešení, kde se opakovaně mnohokrát řeší stejné instance podproblémů, je vhodné ukládat řešení podproblémů do nějaké datové struktury.
- Jedna možnost je ponechat rekurzivní řešení a značit si, které podproblémy již byly vyřešeny.
- Jiná možnost je systematické řešení všech podproblémů ve vhodném pořadí (od nejmenších po největší).

  Při řešení daného podproblému jsou rekurzivní volání nahrazena přečtením již dříve uložených řešení.

Reprezentace grafů

Reprezentace grafu:

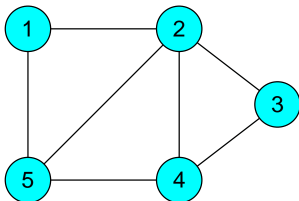


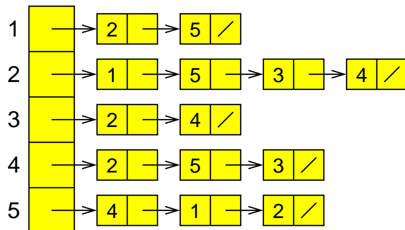


	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	0	0
2	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	1
4	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	0	1

Reprezentace grafů

Reprezentace grafu:

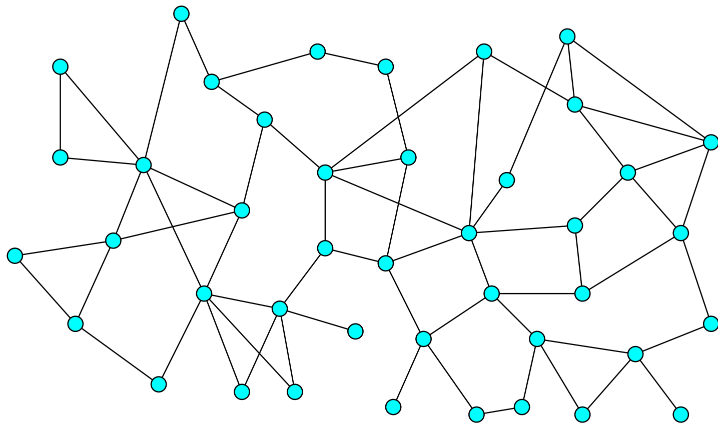




	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0

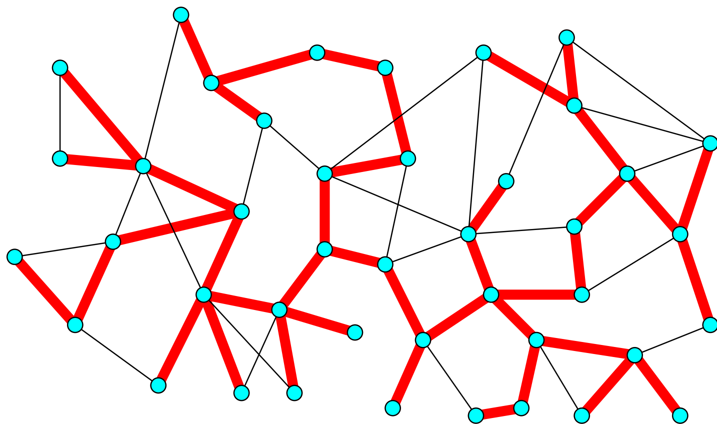
Minimální kostra grafu

Kostra grafu — souvislý podgraf grafu, který obsahuje všechny vrcholy a neobsahuje žádné cykly



Minimální kostra grafu

Kostra grafu — souvislý podgraf grafu, který obsahuje všechny vrcholy a neobsahuje žádné cykly



Minimální kostra grafu

Uvažujme neorientovaný graf $G = (V, E)$, kde navíc máme dány váhy hran, tj. funkci $w : E \to \mathbb{R}_+$, přiřazující každé hraně její váhu.

Pokud T je podmnožina hran (tj. $T \subseteq E$), můžeme funkci w rozšířit na tuto podmnožinu:

$$w(T) = \sum_{e \in T} w(e)$$

Kostra grafu G je dána takovou množinou hran T (kde $T \subseteq E$), která splňuje to, že graf (V, T) je souvislý a neobsahuje žádný cyklus.

Minimální kostra T je taková kostra grafu G, kde pro libovolnou jinou kostru grafu T' platí

$$w(T) \leq w(T')$$

Minimální kostra grafu

Problém: Minimální kostra grafu

Vstup: Souvislý neorientovaný graf $G = (V, E)$ s ohodnocením hran $w : E \to \mathbb{R}_+$.

Výstup: Některá minimální kostra grafu G.

Algoritmus, který by systematicky zkoušel všechny možné kostry, má očividně exponenciální složitost.

Efektivní algoritmy pro tento problém jsou založeny na tzv. **greedy** (**hltavém, hladovém**) řešení:

- na základě nějakého lokálního kritéria vybrat z mnoha možností jen jednu a nezkoušet všechny možnosti

  — z mnoha hran, které je možné do kostry přidat, vybrat vždy hranu s co nejmenší váhou, která nevytvoří cyklus, a tu přidat

Minimální kostra grafu

Kruskalův algoritmus:

- Setřídit hrany podle váhy od nejmenší po největší.
- $T := \emptyset$
- Probírat hrany v daném setříděném pořadí.

  Pro každou hranu e otestovat, zda jejím přidáním do T nevznikne cyklus, pokud ne, nastavit

  $$T := T \cup \{e\}$$
- Vrátit T jako výsledek.

Výpočetní složitost závisí na tom, jak je konkrétně implementováno testování toho, že nevznikne cyklus:

- Přímočaré řešení má složitost $O(n \cdot m)$.
- Existuje efektivní řešení se složitostí $O(m \log n)$.

Minimální kostra grafu

U **greedy algoritmů** je obecně většinou nesložitější částí návrhu algoritmu **důkaz korektnosti** — zdůvodnění toho lokálně optimální volby skutečně vždy vedou ke globálně optimálnímu řešení.

U Kruskalova algoritmu může být důkaz založen na tom, že se udržuje následující invariant:

Aktuální množina T je podmnožinou hran nějaké minimální kostry T_0.

Minimální kostra grafu

- Řekněme, že T je podmnožinou minimální kostry T_0, a algoritmus v následujícím kroku přidá hranu e takovou, že $T \cup \{e\}$ není podmnožinou hran žádné minimální kostry.
- Přidáním hrany e do T_0 vznikne cyklus.

  Tento cyklus musí obsahovat nějakou hranu e' takovou, že $e' \notin T$ (jinak by přidáním e do T vznikl cyklus).

  Navíc musí platit $w(e) \leq w(e')$ (jinak by algoritmus nevybral hranu e).
- Množina $T_0' = (T_0 - \{e'\}) \cup \{e\}$ je rovněž kostra.

  Navíc zjevně platí $w(T_0') \leq w(T_0)$, takže musí platit $w(T_0') = w(T_0)$ (jinak by kostra T_0 nebyla minimální).
- Kostra T_0' je tedy minimální a platí $T \cup \{e\} \subseteq T_0'$, což je ve sporu s předpokladem, že $T \cup \{e\}$ není podmnožinou hran žádné minimální kostry.

Prohledávání do šířky

Nalezení nejkratší cesty v grafu, kde hrany nejsou ohodnoceny:

- Algoritmus pro **prohledávání grafu do šířky**
- Vstupem je graf G (s množinou vrcholů V) a počáteční vrchol s.
- Algoritmus pro všechny vrcholy najde nejkratší cestu z vrcholu s.
- Pro graf, který má n vrcholů a m hran je doba výpočtu tohoto algoritmu $\Theta(n + m)$.

Prohledávání do šířky

Algoritmus: Prohledávání do šířky

```
BFS (G, s):
    BFS-INIT(G, s)
    ENQUEUE(Q, s)
    while Q ≠ ∅ do
        u := DEQUEUE(Q)
        for each v ∈ edges[u] do
            if color[v] = WHITE then
                color[v] := GRAY
                d[v] := d[u] + 1
                pred[v] := u
                ENQUEUE(Q, v)
        color[u] := BLACK
```

Prohledávání do šířky

Algoritmus: Prohledávání do šířky — inicializace

```
BFS-INIT (G, s):
    for each u ∈ V − {s} do
        color[u] := WHITE
        d[u] := ∞
        pred[u] := NIL
    color[s] := GRAY
    d[s] := 0
    pred[s] := NIL
    Q := ∅
```