

Fuzzy logika v reprezentaci znalostí

tutoriál na konferenci

Znalosti 2003

Vilém Novák

Ostravská universita

Ústav pro výzkum a aplikace fuzzy modelování

Ostrava

Vilem.Novak@osu.cz

Obsah

- Teorie evaluačních jazykových výrazů
- Model sémantiky ev. výrazů pomocí fuzzy logiky
- Fuzzy pravidla IF-THEN jako jazykové výrazy a logická dedukce
- Učení se jazykovému popisu na základě dat

Teorie evaluačních jazykových výrazů

Evaluační výrazy:

- *Jednoduché*

$\langle \text{čistý ev.výraz} \rangle :=$

$\langle \text{jaz. operátor} \rangle \langle \text{atomický jaz.ev.výraz} \rangle$

$\langle \text{fuzzy číslo} \rangle := \langle \text{jazykový operátor} \rangle \langle \text{číslo} \rangle$

- *Složené*

A nebo B

Příklad:

Atomické: *malý, střední, velký*

Fuzzy čísla: *asi dvacet dva, zhruba 100*

Jednoduché: *velmi malý, více méně střední, zhruba velký, asi dvacet pět, přibližně x_0*

Složené: *zhruba malý nebo střední*

dvojice antonym

$\langle \text{nominální adjektivum} \rangle \text{ — } \langle \text{antonymum} \rangle$

Např. „*malý – velký*“, „*mělký – hluboký*“

evaluační trichotomie

⟨jaz. operátor⟩⟨nominální adjektivum⟩ —
⟨jaz. operátor⟩⟨střední člen⟩ —
⟨jaz. operátor⟩⟨antonýmum⟩

evaluační jazyková predikace

⟨podstatné jméno⟩ je $\mathcal{A}$

Např. „*teplota je velmi vysoká*“, „*tlak je nízký*“,
„*frekvence je malá nebo střední*“

⟨podstatné jméno⟩ := X

Fuzzy pravidla typu IF-THEN
--

IF $\mathcal{A}$ THEN $\mathcal{B}$

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ – evaluační jazykové predikace

IF X is $\mathcal{A}$ THEN Y is $\mathcal{B}$

Jazykový popis – soustava fuzzy pravidel typu
IF-THEN

IF X is $\mathcal{A}_1$ THEN Y is $\mathcal{B}_1$

IF X is $\mathcal{A}_2$ THEN Y is $\mathcal{B}_2$

.....

IF X is $\mathcal{A}_m$ THEN Y is $\mathcal{B}_m$

*částečně strukturované znalosti týkající
se situací nejrůznějšího druhu*

Výhody:

- používají přirozený jazyk, takže jsou dobře srozumitelné člověku,
- jejich sémantika je vágní, a proto mají velmi široké použití; na druhé straně, jejich vágnost je dostatečně výstižně matematicky reprezentována,
- umožňují odvodit logický závěr, a proto lze na základě nich sofistikovaně rozhodovat, klasifikovat, popř. řídit i dosti složité procesy.

Model sémantiky ev. výrazů pomocí fuzzy logiky

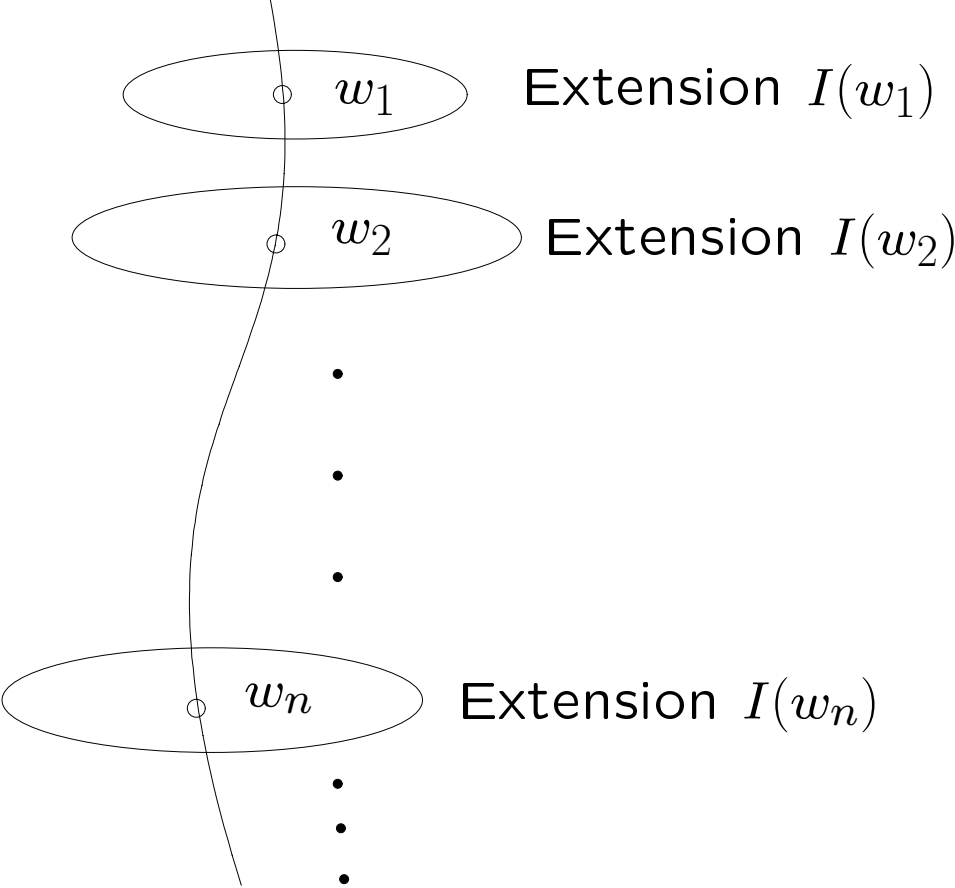
Nutnost odlišovat intenzi a extenzi
R. Carnap

Intenze — vlastnost; vede na různé pravdivostní hodnoty v různých kontextech (možných světech), nezávisí na nich

Extenze — třída prvků určených intenzí, které spadají do významu výrazu v daném kontextu

Výrazy přirozeného jazyka jsou jména intenzí a nelze je identifikovat s jejich extenzemi

Intension I



Fregeho princip kompozicionality
Složené intenze jsou funkcí jednodušších

- Jitřenka = $\{x_0\}$
 Večernice = $\{x_1\}$
Jitřenka je Večernice (Quine)
 $w_1 = \text{Země} : x_0 = x_1$
- Petrovi kolegové = M_C
 Petr pracuje na Ostravské universitě,
 tj. $M_C = \text{„profesoři na OU“}$
Bývalí Petrovi kolegové jezdí na kole
*Bývalí **profesoři na OU** jezdí na kole*
- Objekt = $\langle u_1, \dots, \rangle$ množina hodnot charakteristik
 (věk, výška, délka, váha, apod.)
 “Mladý” = $Y \subseteq [0, 50], Y(30) = 0.8$

Jestliže Berta má 30 let pak je na 80% mladá
 Berta = pes?

Význam evaluačních jazykových výrazů

$W = \{\langle v_L, v_S, v_R \rangle\}$ — množina kontextů
 $v_L, v_S, v_R \in [0, \infty)$, $v_L < v_S < v_R$.

V — množina objektů
 položíme $V = \mathbb{R}$.

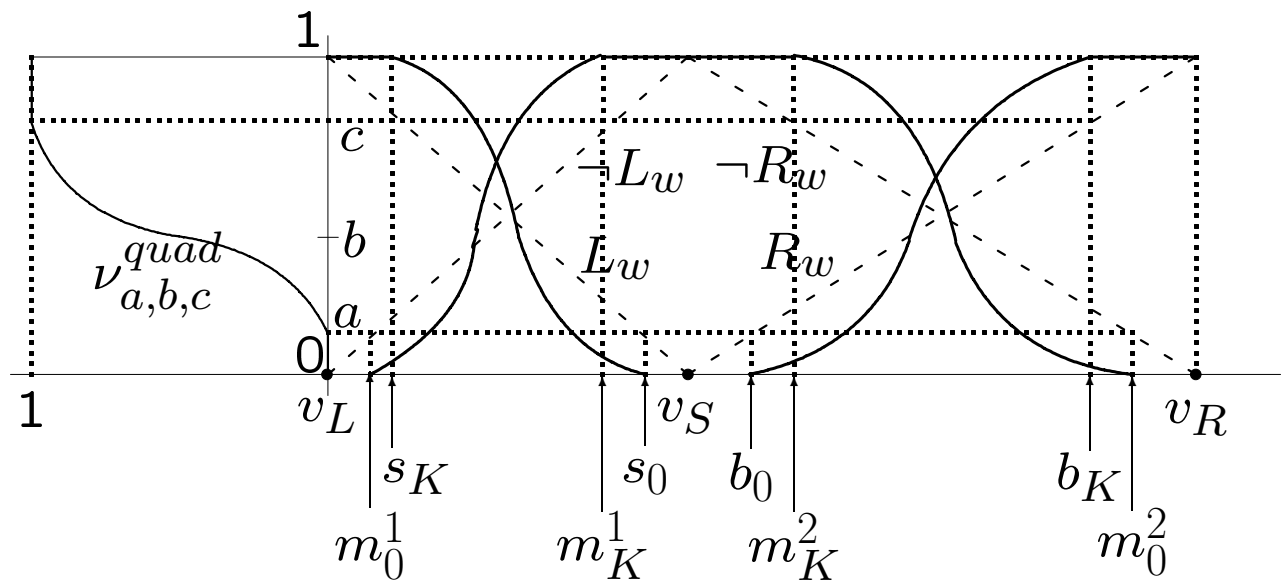
Intenze

$$A : W \longrightarrow \mathcal{F}(V).$$

Extenze v daném kontextu $w \in W$

$$A(w) \underset{\sim}{\subseteq} V.$$

Schéma konstrukce extenzí jednoduchých evaluačních výrazů



Lineární funkce $L, R : W \times \mathbb{R} \longrightarrow L$

$$L_w(x) = \left(\frac{v_S - x}{v_S - v_L} \right)^* \quad (\text{levý horizont})$$

$$R_w(x) = \left(\frac{x - v_S}{v_R - v_S} \right)^* \quad (\text{pravý horizont})$$

střední horizont

$$\begin{aligned} M_w(x) &= \neg L_w(x) \wedge \neg R_w(x) = \\ &= \left(\frac{x - v_L}{v_S - v_L} \right)^* \wedge \left(\frac{v_R - x}{v_R - v_S} \right)^* . \end{aligned}$$

Speciální množina lineárních funkcí

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_w &= \{ B_{w,x_0} \mid \\ B_{w,x_0}(x) &= \left(\frac{x - x_0 + h_L}{h_L} \right)^* \wedge \left(\frac{x_0 - x + h_R}{h_R} \right)^* \\ &\quad \text{or } B_{w,x_0}(x) = \delta_{x_0}(x), \\ x_0 &\in [v_L, v_R], 0 < h_L < x_0 - v_L, 0 < h_R < v_r - x_0 \} \end{aligned}$$

Množina *abstraktních operátorů*

$$\mathbf{Hf} = \{ \nu : [0, 1] \longrightarrow [0, 1] \mid \nu \in \mathbf{Hf}^{quad} \cup \mathbf{Hf}^{lin} \}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Hf}^{quad} &= \{ \nu_{a,b,c}^{quad} \mid a, b \in (-\infty, 1), c \in (0.5, 1], \\ &\quad a < b < c \} \end{aligned}$$

$$\nu_{a,b,c}^{quad}(y) = \begin{cases} 1, & c \leq y, \\ 1 - \frac{(c-y)^2}{(c-b)(c-a)}, & b \leq y < c, \\ \frac{(y-a)^2}{(b-a)(c-a)}, & a \leq y < b, \\ 0, & y < a \end{cases}$$

$$\mathbf{Hf}^{lin} = \{\nu_{a,c}^{lin} \mid a \in (-\infty, 1],$$

$$c \in (0.5, 1], a < b < c\}$$

$$\nu_{a,c}^{lin}(y) = \begin{cases} 1, & c \leq y, \\ \frac{(y-a)}{(c-a)}, & a \leq y < c, \\ 0, & y < a. \end{cases}$$

ν — *deformace* horizontu

Speciální třídy intenzí:

- Typ *Small*

$$\mathbf{Sm} = \{\text{Sm}_\nu : W \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}) \mid \\ \text{Sm}_\nu(w) = \nu(L_w(x)), \nu \in \mathbf{Hf}\}$$

- Typ *Medium*

$$\mathbf{Me} = \{\text{Me}_\nu : W \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}) \mid \\ \text{Me}_\nu(w) = \nu(M_w(x)), \nu \in \mathbf{Hf}\}$$

- Typ *Big*

$$\mathbf{Bi} = \{\text{Bi}_\nu : W \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}) \mid \\ \text{Bi}_\nu(w) = \nu(R_w(x)), \nu \in \mathbf{Hf}\}$$

- Typ *fuzzy číslo*

$$\mathbf{Fn} = \{\text{Fn}_{\nu, x_0} : W \longrightarrow P(\mathcal{F}(\mathbb{R})) \mid \\ \text{Fn}_{\nu, x_0}(w)(x) = \{\nu(B_{w, x_0}(x)) \mid B_{w, x_0} \in \mathbf{B}_w\}, \\ \nu \in \mathbf{Hf}\}$$

Třída intenzí evaluačních výrazů

$$\mathbf{Ev} = \mathbf{Sm} \cup \mathbf{Me} \cup \mathbf{Bi} \cup \mathbf{Fn}.$$

Nechť $\text{Ev} \in \mathbf{Ev}$

Extenze Ev v kontextu $w \in W$: $\text{Ev}_w = \text{Ev}(w) \subseteq \mathbb{R}$

Ev_1, Ev_2 — intenze stejného typu, obsahují operátory ν_1, ν_2

Uspořádání evaluačních výrazů stejného typu

Ev_1 je *ostřejší*, než Ev_2 , $Ev_1 < Ev_2$

$\text{Int}(\langle \text{jaz. operátor} \rangle \textit{malý}) \in \mathbf{Sm}$

$\text{Int}(\langle \text{jaz. operátor} \rangle \textit{střední}) \in \mathbf{Me}$

$\text{Int}(\langle \text{jaz. operátor} \rangle \textit{velký}) \in \mathbf{Bi}$

$\text{Int}(\langle \text{jaz. operátor} \rangle \langle \text{fuzzy číslo} \rangle) \in \mathbf{Fn}$

Extenze $\mathcal{A}$ v kontextu $w = \langle v_L, v_S, v_R \rangle$

$$\text{Ext}(\mathcal{A}) = \text{Int}(\mathcal{A})(w) = A \underset{\sim}{\subseteq} [v_L, v_R]$$

Základní jazykové operátory

<i>extremely (Ex)</i>	ν_{Ex}
<i>significantly (Si)</i>	ν_{Si}
<i>very (Ve)</i>	ν_{Ve}
prázdný operátor	ν_{a_0, b_0, c_0}
more or less (ML)	ν_{ML}
roughly (Ro)	ν_{Ro}
quite roughly (QR)	ν_{QR}
very roughly (VR)	ν_{VR}

$$\nu_{Ex} < \nu_{Si} < \nu_{Ve} < \nu_{a_0, b_0, c_0} <$$

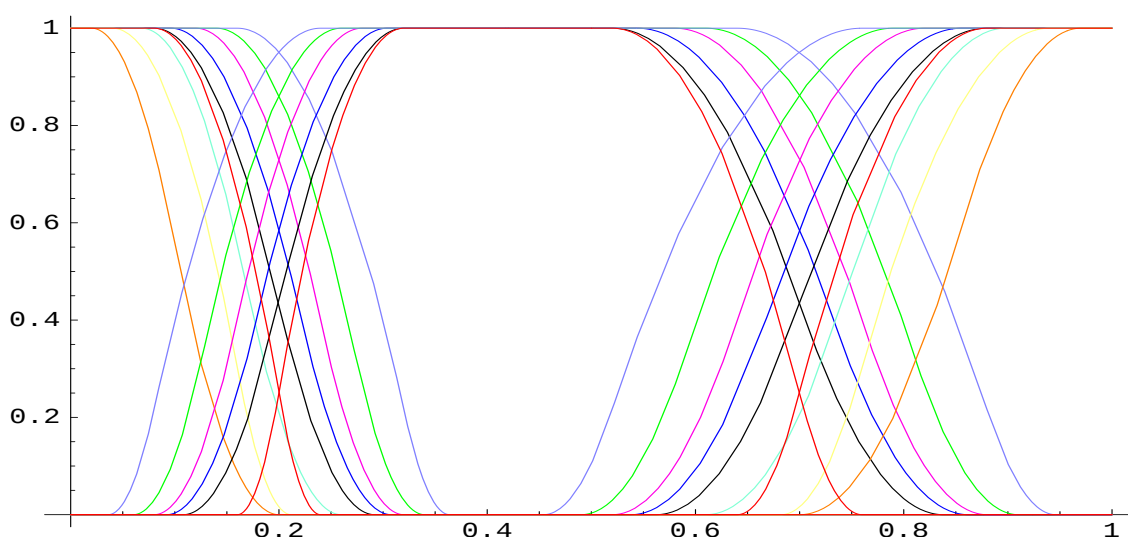
$$\nu_{ML} < \nu_{Ro} < \nu_{QR} < \nu_{VR}$$

Empirické hodnoty:

Jazykový operátor	a	b	c
<i>Extremely</i>	0.5	0.75	0.95
<i>Significantly</i>	0.47	0.6	0.8
<i>Very</i>	0.35	0.58	0.83
prázdný	0.27	0.5	0.8
<i>Rather</i>	0.4	0.5	0.8
<i>More or less</i>	0.23	0.45	0.76
<i>Roughly</i>	0.2	0.4	0.7
<i>Quite roughly</i>	0.15	0.32	0.65
<i>Very roughly</i>	0.09	0.2	0.6

Speciální druhy operátorů: *rather*

$$\nu_{Ra} \in \mathbf{Hf}^{quad}, \quad a > a_0, \quad b \leq b_0, \quad c < c_0$$



Fuzzy pravidla IF-THEN jako jazykové výrazy a logická dedukce

Význam IF-THEN pravidla

$$\text{Int } \mathcal{R} := \text{Ev}_1 \Rightarrow \text{Ev}_2$$

Extenze v kontextech $w, w' \in W$

$$\text{Ext}_{\langle w, w' \rangle}(\mathcal{R}) := \text{Ev}_{1,w} \rightarrow \text{Ev}_{2,w'} \subseteq w \times w'$$

Operace implikace $a \rightarrow b = 1 \wedge (1 - a + b)$, $a, b \in [0, 1]$

Logická dedukce — pravidlo modus ponens

$$\frac{\text{Ev}_1, \text{Ev}_1 \Rightarrow \text{Ev}_2}{\text{Ev}_2}$$

Jazykový popis

$$\begin{array}{c} \text{Ev}_{11} \Rightarrow \text{Ev}_{12} \\ \text{Ev}_{11} \Rightarrow \text{Ev}_{12} \\ \vdots \\ \text{Ev}_{11} \Rightarrow \text{Ev}_{12} \end{array}$$

Příklad:

Pravidlo	$X \Rightarrow Y$
1	$VeSm \Rightarrow RoBi$
2	$Sm \Rightarrow Bi$
3	$Me \Rightarrow Me$
4	$Bi \Rightarrow VeSm$

Logická dedukce vede k tomu, že se zpravidla uplatní jen jedno fuzzy IF-THEN pravidlo

Operace defuzzifikace DEE

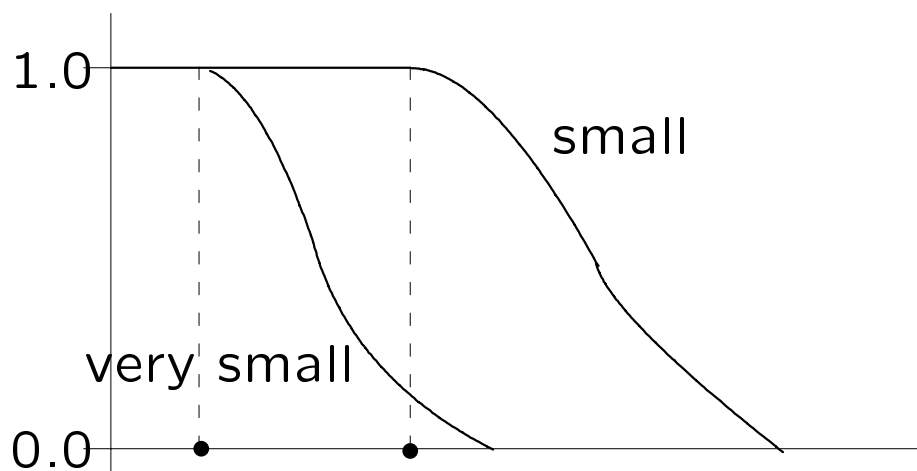
(Defuzzification of Evaluating Expressions)

$$\text{DEE}(\text{Ev}_w) = \begin{cases} \text{LOM}(\text{Sm}_w), & \text{if } \text{Ev} \in \mathbf{Sm}, \\ \text{COG}(\text{Ev}_w), & \text{if } \text{Ev} \in \mathbf{Me} \\ & \text{or } \text{Ev} \in \mathbf{Fn}, \\ \text{FOM}(\text{Bi}_w), & \text{if } \text{Ev} \in \mathbf{Bi} \end{cases}$$

Let $w = \langle v_L, v_S, v_R \rangle$ be a possible world. Then

$$\text{LOM}(\text{Sm}_{\nu,w}) = cv_L + (1 - c)v_S, \quad (1)$$

$$\text{FOM}(\text{Bi}_{\nu,w}) = cv_R + (1 - c)v_S \quad (2)$$



Fuzzy IF-THEN pravidlo vede na funkci

$$f_R(u) = \text{DEE}(\text{Ev}_{1,w}(u) \rightarrow \text{Ev}_{2,w'}), \quad u \in w$$

Pomocí logické dedukce dostaneme po částech spojitou, popř. monotónní funkci $f_R : w \longrightarrow w'$

Učení se jazykovému popisu na základě dat

Speciální třída funkcí $Suit_w : w \longrightarrow \mathbf{Ev}$
(suitable term)

Dána data $\langle u_1, \dots, u_n \rangle$

$$\langle \mathbf{Ev}_1, \dots, \mathbf{Ev}_n \rangle$$

$$\mathbf{Ev}_{i,w} = Suit_w(u_i), \quad u_i \in w$$

Vygenerovaný jazykový popis

data		generované pravidlo
u_{11}	u_{12}	$\mathbf{Ev}_{11} \Rightarrow \mathbf{Ev}_{12}$
u_{21}	u_{22}	$\mathbf{Ev}_{21} \Rightarrow \mathbf{Ev}_{22}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
u_{m1}	u_{m2}	$\mathbf{Ev}_{m1} \Rightarrow \mathbf{Ev}_{m2}$

Příklad:

X	Y	Y^{theor}
$\langle 9, 00, 65, 00 \rangle$	$\langle 1, 00, 6, 00 \rangle$	$\langle 1, 00, 6, 00 \rangle$
9.5	2.1	1.93
16	2.5	2.72
20	2.3	2.8
24.5	2.55	2.9
26	3.4	2.92
27	4.2	2.95
32.5	4.8	3.65
38	5	3.09
41	4.7	3.08
47	5.3	3.05
50	4.1	3.03
56	3	2.85
61	2.6	1.42
64	1.2	1.13

	X	$\Rightarrow$	Y
1.	ex sm	$\Rightarrow$	ro sm
2.	ro sm	$\Rightarrow$	qr sm
3.	qr sm	$\Rightarrow$	vr sm
4.	vr sm	$\Rightarrow$	ro bi
5.	me	$\Rightarrow$	ra bi
6.	vr bi	$\Rightarrow$	bi
7.	qr bi	$\Rightarrow$	ml bi
8.	ml bi	$\Rightarrow$	qr bi
9.	bi	$\Rightarrow$	me
10.	si bi	$\Rightarrow$	vr sm
11.	ex bi	$\Rightarrow$	si sm
12.	sm	$\Rightarrow$	vr sm
13.	vr sm	$\Rightarrow$	vr bi
14.	ro bi	$\Rightarrow$	bi

Vygenerovaný jazykový popis se chová dobře ve všech kontextech; fuzzy regulace, fuzzy model