množinu R, musí v určitých r hodech padnout líc a ve zbývajících $n-r$ hodech rub). To je příklad pravděpodobnostního prostoru, kde elementární jevy nemají všechny stejnou pravděpodobnost.

Vraťme se k naší geometrické situaci. Představme si, že bychom do roviny nakreslili jen přímky z takové náhodně vybrané podmnožiny R. Zavedeme náhodnou veličinu $f = f(R)$, což bude počet průsečíků přímek z R úrovně 0, jinak řečeno těch průsečíků, jimž žádná přímka z R nezabraňuje ve výhledu na bod o. Budeme dvěma způsoby počítat střední hodnotu $\mathbf{E}f$. Na jedné straně víme, podle poznámky na začátku důkazu, že pro každou konkrétní množinu R je $f(R) \leq |R|$, a proto $\mathbf{E}f \leq \mathbf{E}|R|$. Lze snadno spočítat (ponecháváme do cvičení), že $\mathbf{E}|R| = pn$.

Nyní jiný způsob počítání $\mathbf{E}f$. Pro každý průsečík v přímek z L definujeme jev A_v, který nastane, pokud v bude jedním z průsečíků úrovně 0 přímek z R, t.j. přispěje 1 k hodnotě $f(R)$. Jev A nastane, právě když jsou splněny tyto dvě podmínky:

- Obě přímky, určující průsečík v, padnou do R.
- Žádná z přímek, protínajících úsečku ov ve vnitřním bodě (t.j zakrývající bodu o výhled na bod v) nepadne do R.

Z toho je vidět, že $P(A_v) = p^2(1-p)^{u(v)}$, kde $u(v)$ značí úroveň průsečíku v.

Označme M množinu všech průsečíků přímek z L, a $M_k \subseteq M$ množinu průsečíků úrovně nejvýš k. Máme

$$\mathbf{E}f = \sum_{v\in M} \mathbf{E}I_{A_v} = \sum_{v\in M} P(A_v) \geq \sum_{v\in M_k} P(A_v) = \sum_{v\in M_k} p^2(1-p)^{u(v)} \geq$$

$$\geq \sum_{v\in M_k} p^2(1-p)^k = |M_k|p^2(1-p)^k$$

Celkem jsme tedy odvodili $np \geq \mathbf{E}f \geq |M_k|p^2(1-p)^k$, neboli

$$|M_k| \leq \frac{n}{p(1-p)^k}$$

Zvolíme teď číslo p tak, abychom na pravé straně dostali co nejmenší hodnotu. Vhodná volba je například $p = 1/(k+1)$. Je známo, že pro každé $k \geq 1$ je $(1-\frac{1}{k+1})^k > e^{-1} > \frac{1}{3}$, takže vyjde $|M_k| \leq 3(k+1)n$, jak se tvrdí ve větě. □

Poznamenejme ještě, že problém odhadnout maximální možný počet průsečíků úrovně *přesně* k je mnohem obtížnější a dosud nevyřešený.

Průměrný počet porovnání v algoritmu QUICKSORT. Známý třídící algoritmus QUICKSORT (česky „rychlotřídič"?), dostane-li jako vstup posloupnost prvků $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, pracuje takto: porovnáním s x_1 rozdělí ostatní prvky na dvě skupiny, na prvky menší než x_1 a prvky aspoň tak velké jako x_1 (přitom v obou skupinách zachová pořadí prvků jako bylo na vstupu). Každou skupinu pak zvlášť setřídí rekurzivním voláním sebe sama. Rekurze se zastaví u triviálně malých skupin (např. nejvýš dvouprvkových).

Tento algoritmus v nejhorším případě může potřebovat řádově až n^2 kroků (nejhorší, co mu můžeme provést, je dát mu již setříděnou posloupnost). V praxi je však velmi oblíben a bere se jako jeden z nejrychlejších třídících algoritmů. Jeden z důvodů je následující výsledek o jeho průměrném chování:

9.4.5 Věta. *Nechť $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ jsou tříděné prvky v pořadí podle velikosti. Buď π permutace množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, a nechť $T(\pi)$ značí počet porovnání (dvojic čísel podle velikosti) provedených algoritmem QUICKSORT pro vstupní posloupnost $(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(n)})$. Potom při náhodné volbě permutace π platí $\mathbf{E}T \leq 2n\ln n$.*

Důvod takového chování není těžké vidět. Jsou-li vstupní čísla srovnána náhodně, lze čekat, že první prvek většinou rozdělí ostatní na dvě zhruba stejně velké skupiny. Rekurze pak bude mít $\log n$ úrovní, a na každé úrovni se spotřebuje celkem $O(n)$ porovnání. To ale není pořádný důkaz. Následující elegantní analýza dává i správnou konstantu úměrnosti.

Důkaz. Nechť T_i je počet prvků porovnávaných s prvkem $x_{\pi(i)}$ ve fázi, kdy se stane dělicím prvkem. Například $T_1 = n - 1$, protože $x_{\pi(1)}$ je první prvek na vstupu a porovnávají se s ním všechny ostatní prvky. Pokud $\pi(2) < \pi(1)$, T_2 bude $\pi(1) - 2$, a pro $\pi(2) > \pi(1)$ je $T_2 = n - \pi(1) - 1$. Obecně si můžeme T_i představit podle obrázku:

Kroužky na tomto obrázku znázorňují $x_1, x_2, \ldots, x_n$ seřazené podle velikosti, plně jsou kresleny prvky s indexy $\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(i-1)$, dvojitě je označen $x_{\pi(i)}$, a prázdné jsou kroužky pro ostatní prvky. Není těžké si rozmyslet, že T_i je právě počet prázdných kroužků, které „vidí" prvek $x_{\pi(i)}$, přičemž skrz plné kroužky vidět není.

Budeme hledat $\mathbf{E}T_i$. Představme si, že indexy probíráme pozpátku a sledujeme příslušný obrázek s plnými a prázdnými kroužky. Nejprve jsou všechny kroužky plné, postupně se jeden po druhém v náhodném pořadí vyprazdňují. V okamžiku, kdy zbývá i plných kroužků, vezmeme náhodně jeden zbývající plný kroužek, $x_{\pi(i)}$, a T_i bude počet prázdných kroužků, které vidí.

Použijeme jednoduché počítání dvěma způsoby. Každý *prázdný* kroužek vidí nejvýš dva plné kroužky. Proto celkový počet dvojic (plný kroužek, prázdný kroužek), které se vidí, je nejvýš $2(n-i)$. Na jeden z i plných kroužků tedy připadá v průměru nejvýš $\frac{2(n-i)}{i}$ prázdných kroužků, a to je potřebný odhad pro $\mathbf{E}T_i$. Z linearity střední hodnoty konečně dostáváme

$$\mathbf{E}T \quad \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}T_i \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{2(n-i)}{i} = 2n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - 2n \leq 2n \ln n$$

(součet převrácených hodnot jsme odhadli podle cvičení 2.4.12) □

Poznámky. Složitější analýzou se dá dokázat, že při náhodné vstupní permutaci je nepříznivé chování algoritmu (t.j. počet porovnání podstatně větší než řádově $n \log n$) velmi málo pravděpodobné. Přesto

skutečnost, že algoritmus pracuje špatně zrovna pro setříděné nebo skoro setříděné posloupnosti, je nepříjemná. Existuje řada verzí algoritmu QUICKSORT, které se různými modifikacemi snaží toto odstranit. Modifikace se týkají způsobu výběru prvku, podle nějž se ostatní prvky rozdělí.

Cvičení

1. Dokažte z věty 9.4.2, že graf na n vrcholech bez trojúhelníků má nejvýš $n^2/4$ hran.
2.* Ukažte, že jsou-li $d_1, \ldots, d_n$ nezáporná reálná čísla se součtem 1, potom výraz $\sum_{i=1}^{n} 1/(d_i + 1)$ je minimální pro $d_1 = d_2 = \ldots = d_n = \frac{1}{n}$.
3. Nechť podmnožina $R \subseteq L$ je zvolena náhodně jako v důkazu věty 9.4.4. Ukažte $\mathbf{E}|R| = pn$.
4.* Uvažme přímky jako ve větě 9.4.4, z nichž navíc žádná není svislá. Řekneme, že průsečík v je *špice*, pokud jedna z přímek jej definujících má kladnou směrnici (zleva doprava stoupá) a druhá má zápornou směrnici (zleva doprava klesá). Dokažte, že existuje nejvýš $6(k+1)^2$ špic úrovně nejvýš k.

pokud existuje množina $M \in \mathcal{M}$ obsahující zároveň x i y. Jsou-li x, y dva nespojené body, definujeme nový systém množin $(X', \mathcal{M}')$ vzniklý „slepením“ bodů x a y. Neformálně, body x a y ztotožníme do jediného nového bodu, z, a z dáme do všech množin, do nichž předtím patřil x nebo y. Formálně zapsáno: $X' = (X \setminus \{x,y\}) \cup \{z\}$, $\mathcal{M}' = \{M \in \mathcal{M};\ M \cap \{x,y\} = \emptyset\} \cup \{(M \setminus \{x,y\}) \cup \{z\};\ M \cap \{x,y\} \neq \emptyset\}$.

Všimněme si, že jsou-li body x a y nespojené, potom $(X', \mathcal{M}')$ bude opět systém trojic, a množina X' má o jeden bod méně než X. Dále tvrdíme, že *je-li $(X', \mathcal{M}')$ 2-obarvitelný, potom i $(X, \mathcal{M})$ je 2-obarvitelný*: Vezmeme totiž 2-obarvení množiny X', a obarvíme X stejně, přičemž x i y dostanou tu barvu, již měl „slepený“ bod z. Je snadné si rozmyslet, že nemůže vzniknout žádná jednobarevná množina. K dokončení důkazu věty 9.1.5 stačí tedy ukázat následující:

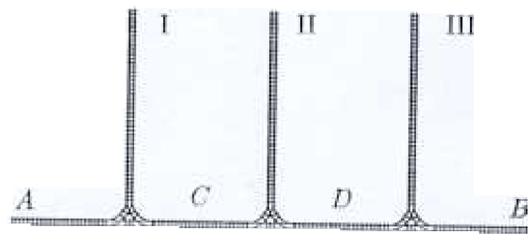
9.1.7 Lemma. *Nechť $(X, \mathcal{M})$ je systém 6 trojic, $|X| \geq 7$. Potom v X existují 2 nespojené body.*

Důkaz. Jedna trojice $M \in \mathcal{M}$ způsobí, že 3 dvojice bodů budou spojené. 6 trojic tedy dá nejvýš $3 \times 6 = 18$ spojených dvojic. Přitom ale na 7-bodové množině je $\binom{7}{2} = 21$ dvojic bodů, takže některá z nich je nespojená (dokonce aspoň 3). □

Poznamenejme ještě, že přesná hodnota $m(4)$ již známa není, jsou k dispozici jen horní a dolní odhady. Přitom je snadné si rozmyslet, že tento problém se v principu dá vyřešit probráním konečného počtu konfigurací (systémů čtveřic). Jejich počet je ale tak obří, že je to nad síly všech superpočítačů.

Cvičení

1.* Na koleji A na následujícím obrázku stojí vlak s n vagóny (srovnanými v jistém pořadí). Vagóny se postupně přesunují na kolej B, přičemž každý vagón může nebo nemusí zajet na některé z postranních kolejí; požadujeme však, aby žádný vagón nepřejel žádnou z výhybek přiléhajících ke kolejím A,B,C,D více než jednou (předpokládáme, že na kažou postranní kolej se v případě potřeby vejdou všechny vagóny najednou).



Dokažte, že pro dost velké n nelze na koleji B docílit každé možné pořadí vagónů.

2. (a) Dokažte, že každou booleovskou funkci n proměnných lze vyjádřit logickou formulí.

   (b) Ukažte, že formuli v (a) lze volit délky nejvýš $Cn\,2^n$, pro vhodnou konstantu C. * Podaří se vám tento odhad ještě řádově zlepšit?

3. Dokažte, že každý systém nejvýš 14 čtveřic lze 2-obarvit:

   (a) Pro systém na nejvýš 14 bodech použijte náhodné obarvení (7 bílých a 7 černých bodů).

   (b) Pro systém na aspoň 15 bodech ukažte, že existuje nespojená dvojice.

4. Máme 27 pravých mincí a 1 falešnou, o trochu těžší než pravé mince. Ukažte, že na určení falešné mince potřebujeme aspoň 4 vážení na rovnoramenných vahách (bez použití závaží, t.j. můžeme pouze porovnávat celkovou hmotnost některých k mincí s celkovou hmotností jiných k mincí; neobsahuje-li ani jedna skupina falešnou minci, výsledkem je rovnováha).

9.2 Konečné pravděpodobnostní prostory

Nyní je čas pohovořit o základních pojmech matematické teorie pravděpodobnosti. Omezíme se přitom jen na to, co budeme pro naše příklady potřebovat. V žádném případě není cílem nahradit kurs z teorie pravděpodobnosti, matematicky nebo informaticky vzdělaný člověk by o pravděpodobnosti určitě měl vědět podstatně více, než co uvedeme zde.

Pravděpodobnost je jeden z pojmů, který vystupuje jak v matematice, tak mimo matematiku, t.j. „ve skutečném životě“, „v praxi“, nebo jak jinak ještě se to ještě může nazývat[1]. Definovat „skutečnou" pravděpodobnost je obtížné, a je to otázka filosofická. Matematika se ovšem jejímu řešení vpodstatě vyhne: sestrojí totiž matematický model „skutečné" pravděpodobnosti, který je čistě matematickým objektem. Tento model má ve sobě zabudováno (jako axiomy) několik jednoduchých vlastností, odpozorovaných ze „skutečné" pravděpodobnosti (jako např. že pravděpodobnost, že nějaký jev nastane, plus pravděpodobnost, že tento jev nenastane, je dohromady 1), dále se s ním ale pracuje jako s jinými matematickými objekty, tedy všechny jeho vlastnosti, všechna tvrzení o něm a všechna pravidla pro počítání pravděpodobnosti jsou logicky odvozena z axiomů. Tento model je velmi užitečný a jeho předpovědi se shodují s chováním pravděpodobnosti v praxi, což ale to neznamená, že „skutečná" a matematická pravděpodobnost jsou totožné pojmy. Nadále budeme mluvit o pravděpodobnosti v matematickém smyslu, budeme se však odvolávat na příklady se „skutečnou" pravděpodobností jako motivaci jednotlivých pojmů a axiomů.

Základním pojmem v teorii pravděpodobnosti je *pravděpodobnostní prostor*. Omezíme se na konečné pravděpodobnostní prostory.

9.2.1 Definice. Konečným pravděpodobnostním prostorem *rozumíme dvojici* (Ω, P), *kde* Ω *je konečná množina, a* $P : 2^{\Omega} \to [0,1]$ *je funkce, přiřazující každé podmnožině* Ω *číslo z intervalu* $[0,1]$, *taková, že*

(i) $P(\emptyset) = 0$

(ii) $P(\Omega) = 1$

(iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ *pro libovolné dvě* disjunktní *množiny* $A, B \subseteq \Omega$.

Množinu Ω si můžeme představovat jako množinu všech možných výsledků nějakého náhodného pokusu. Její prvky se nazývají *elementární jevy*. Kdyby tento pokus byl třeba jeden hod hrací kostkou,

[1] I v mimomatematickém významu myslíme ovšem pravděpodobnost jako veličinu, jako ve větě „Pravděpodobnost toho, že na hrací kostce padne šestka, je $\frac{1}{6}$.", nikoli jako ve třeba ve větě „Ten člověk pravděpodobně neví, že tramvaje teď jezdí jinudy.".

elementární jevy by byly „padla jednička", „padla dvojka",..., „padla šestka" (pro větší stručnost je můžeme např. označit $\omega_1, \ldots, \omega_6$). Podmnožiny Ω se jmenují *jevy*, tak třeba jeden jev by byl „padlo sudé číslo", neboli $\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$. Z pochopitelných důvodů se prázdné množině říká *jev nemožný*, celému Ω *jev jistý*. Teorie pravděpodobnosti má své názvy i pro různé množinové pojmy a operace. Tak „$\omega \in A$" můžeme číst „nastal jev A" nebo obšírněji „elementární jev ω je příznivý jevu A"; „$\omega \in A \cap B$" interpretujeme jako „nastaly zároveň jevy A i B"; „$A \cap B = \emptyset$" můžeme vyjádřit jako „jevy A a B jsou neslučitelné" a podobně.

Je-li $A \subseteq \Omega$ jev, číslo $P(A)$ se nazývá *pravděpodobnost jevu A*. Axiomy (i)-(iii) vyjadřují vlastnosti, které od pravděpodobnosti přirozeně očekáváme. Z vlastnosti (iii) je snadno vidět, že hodnotu P stačí zadat na všech jednoprvkových jevech (množinách), a pravděpodobnost libovolného jevu je rovna součtu pravděpodobností jeho prvků, tedy elementárních jevů (přesněji, součtu pravděpodobností všech jeho jednoprvkových podmnožin, ale dovolíme si toto zkrácené vyjádření).

Nejjednodušším a možná nejdůležitějším konečným pravděpodobnostním prostorem je takový, v němž všechny elementární jevy mají stejnou pravděpodobnost, t.j. funkce P je dána předpisem

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Takový prostor odráží tzv. *klasickou definici pravděpodobnosti*. V této definici (formulované Laplacem) se předpokládá, že všechny možné výsledky určitého náhodného pokusu jsou, na podkladě symetrie a homogenity, stejně možné. Je-li všech možných výsledků pokusu (elementárních jevů) n a výsledků příznivých nějakému jevu A je m, potom pravděpodobnost jevu A se definuje jako m/n. To se někdy heslovitě vyjadřuje rčením, že pravděpodobnost je počet případů příznivých ku počtu případů možných. Jako definice toho, co pravděpodobnost je, to není příliš uspokojivé (potíž je v obratu „stejně možné"), navíc to nezahrnuje nekonečné pravděpodobnostní prostory, ale v mnoha konkrétních případech je to přinejmenším užitečný návod, jak pravděpodobnost počítat.

O nekonečných pravděpodobnostních prostorech. Tím, že jsme se omezili na konečné pravděpodobnostní prostory, jsme si situaci mate-

Když si matematikové položili tuto otázku, dlouho se nedařilo najít řešení; konstrukce takových turnajů je obtížná. Pravděpodobnostní metodou se ukáže existence takového výsledku turnaje, pro dost velké n, poměrně snadno.

Uvažme náhodný turnaj, kde si představujeme, že výsledek každého zápasu je určen nestranným losem. Podíváme se na pevně zvolenou trojici hráčů x, y, z. Pravděpodobnost, že nějaký jiný hráč w s nimi se všemi vyhraje, je $2^{-3} = \frac{1}{8}$, tedy pravděpodobnost že w prohraje aspoň s jedním je $\frac{7}{8}$. Jaká je pravděpodobnost, že každý z $n-3$ hráčů w (různých od x, y, z) prohraje aspoň s jedním z x, y, z? Pro různé hráče w jsou výsledky jejich zápasů s x, y, z na sobě nezávislé, a tedy tato pravděpodobnost je $(\frac{7}{8})^{n-3}$. Trojici $\{x, y, z\}$ lze volit $\binom{n}{3}$ způsoby, proto pravděpodobnost, že pro aspoň jednu z těchto trojic x, y, z není žádný další hráč, jenž x, y i z porazil, je nejvýš $\binom{n}{3}(\frac{7}{8})^{n-3}$. Pro $n \geq 91$ je tato pravděpodobnost menší než 1, proto existuje nějaký výsledek turnaje n hráčů s požadovanou vlastností. □

Cvičení

1. Ukažte, že náhodný graf skoro jistě obsahuje trojúhelník (tím podáte jiné řešení příkladu 9.2.7).
2.* Ukažte, že náhodný graf je skoro jistě souvislý.
3. Najděte příklad 3 jevů v nějakém pravděpodobnostním prostoru takových, že každé dva jsou nezávislé, ale všechny 3 nezávislé nejsou.
4. Ukažte, že jsou-li A, B nezávislé jevy, pak také jejich doplňky $\Omega \setminus A$, $\Omega \setminus B$ jsou nezávislé.
5. (a) Ukažte podle definice, že jevy $A_1, \ldots, A_n$ v prostoru $\mathcal{C}_n$, definované v textu za definicí 9.2.8, jsou skutečně nezávislé.

   (b)* Buď (Ω, P) konečný pravděpodobnostní prostor, v němž existuje n nezávislých jevů $A_1, \ldots, A_n$ takových, že $0 < P(A_i) < 1$ pro každé i. Dokažte, že $|\Omega| \geq 2^n$.
6. Nechť (Ω, P) je konečný pravděpodobnostní prostor, v němž všechny prvky mají pravděpodobnost $1/|\Omega|$. Ukažte, že je-li $|\Omega|$ prvočíslo, pak žádné dva netriviální jevy (různé od $\emptyset$ a Ω) nejsou nezávislé.
7. Pro jednoduchost předpokládejme, že pravděpodobnost narození kluka i holky je stejná (což ve skutečnosti není zcela tak). O jisté rodině víme, že mají přesně dvě děti, a aspoň jedno z nich je kluk. Jaká je pravděpodobnost, že mají dva kluky?

9.3 Střední hodnota

9.3.1 Definice. *Nechť (Ω, P) je nějaký konečný pravděpodobnostní prostor.* Náhodnou veličinou *na Ω nazveme každé zobrazení $f : \Omega \to \mathbf{R}$.*

Náhodná veličina f tedy přiřazuje každému elementárnímu jevu $\omega \in \Omega$ nějaké reálné číslo $f(\omega)$. Teď několik příkladů náhodných veličin:

9.3.2 Příklad (Počet jedniček). *Je-li $\mathcal{C}_n$ prostor všech n-prvkových posloupností nul a jedniček, můžeme definovat náhodnou veličinu f_1 takto: pro posloupnost s, $f_1(s)$ je počet jedniček v s.*

9.3.3 Příklad (Počet živých zajíců). *Každý z n lovců zamíří na jednoho náhodně vybraného z n zajíců, a všichni naráz vystřelí. Náhodná veličina f_2 je počet přeživších zajíců (za předpokladu, že se každý lovec trefí). Formálně, pravděpodobnostní prostor zde bude množina všech zobrazení μ množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ do sebe, každé s pravděpodobností n^{-n}, a $f_2(\mu)$ je počet bodů mino obraz μ.*

9.3.4 Příklad (Počet levých maxim). *Na pravděpodobnostním prostoru $\mathcal{S}_n$ všech permutací na množině $\{1, 2, \ldots, n\}$, definujeme náhodnou veličinu f_3: $f_3(\pi)$ je počet* levých maxim *permutace π, t.j. počet i takových, že $\pi(i) > \pi(j)$ pro všechna $j < i$. Představme si závod třeba ve vrhu koulí, a pro jednoduchost předpokládejme, že každý závodník podává stabilní výkon, t.j., pokaždé hodí stejně. V první sérii hodů hází n závodníků v náhodném pořadí. Potom f_3 bude udávat, kolikrát se v této první sérii hodů měnil závodník s dosud nejlepším výkonem.*

9.3.5 Příklad (Složitost třídícího algoritmu). *A ještě jedna složitější náhodná veličina. Nechť A je nějaký třídicí algoritmus, to znamená, A dostane jako vstup n-tici čísel $x_1, \ldots, x_n$, a na výstup vypíše táž čísla setříděná podle velikosti. Předpokládejme, že počet kroků výpočtu algoritmu A závisí jen na pořadí vstupních čísel podle velikosti, takže si můžeme představovat, že na vstupu je nějaká permutace π čísel $\{1, 2, \ldots, n\}$ (tuto podmínku splňuje mnoho skutečně používaných algoritmů). Definujeme náhodnou veličinu f_4 na prostoru S_n; $f_4(\pi)$ je počet kroků, vykonaných algoritmem A pro vstupní permutaci π.*

9.3.6 Definice. *Nechť (Ω, P) je konečný pravděpodobnostní prostor, f náhodná veličina na něm.* Střední hodnota *f bude reálné číslo, které značíme $\mathbf{E}f$ a definujeme předpisem*

$$\mathbf{E}f = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) f(\omega)$$

(písmeno $\mathbf{E}$ je zkratka z anglického „expectation", v překladu „očekávání").

Střední hodnotu si můžeme představovat takto: opakujeme-li mnohokrát náhodnou volbu prvku z Ω, bude se průměrná hodnota f přes tyto náhodně zvolené prvky blížit $\mathbf{E}f$. Jsou-li speciálně všechny elementární jevy $\omega \in \Omega$ stejně pravděpodobné (jak je tomu téměř ve všech našich příkladech), je střední hodnota f prostě aritmetický průměr všech hodnot f:

$$\mathbf{E}f = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{\omega \in \Omega} f(\omega)$$

Pokračování příkladu 9.3.2 (Počet jedniček). Pro ilustraci vypočteme střední hodnotu náhodné veličiny f_1, počtu jedniček v náhodné n-členné posloupnosti nul a jedniček, podle definice. Veličina f_1 má hodnotu 0 pro jedinou posloupnost (samých nul), hodnotu 1 pro n posloupností,..., hodnotu k pro $\binom{n}{k}$ posloupností z $\mathcal{C}_n$. Proto

$$\mathbf{E}f_1 = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k.$$

Jak se počítá v příkladu 10.1.2, je suma na pravé straně rovna $n2^{n-1}$, takže $\mathbf{E}f_1 = n/2$. To ovšem souhlasí s intuicí, že při n hodech mincí v průměru padne polovina líců.

Hodnota $\mathbf{E}f_1$ se dá stanovit jednodušeji, následujícím trikem. Pro každou posloupnost $s \in \mathcal{C}_n$ uvažme posloupnost $\bar{s}$, která vznikne ze s záměnou jedniček na nuly a obráceně. Platí $f_1(s) + f_1(\bar{s}) = n$. Toho využijeme takto:

$$\mathbf{E}f_1 = 2^{-n} \sum_{s \in \mathcal{C}_n} f_1(s) = \frac{1}{2^n . 2} \sum_{s \in \mathcal{C}_n} (f_1(s) + f_1(\bar{s})) = 2^{-n-1} |\mathcal{C}_n| n = \frac{n}{2}$$

Popíšeme nyní metodu, jíž se střední hodnota často dá spočítat velmi jednoduše (viděli jsme, že výpočet podle definice je i v jednoduchých případech pracný). Potřebujeme na to definici a jednoduchou větu.

9.3.7 Definice. *Buď $A \subseteq \Omega$ jev v nějakém pravděpodobnostním prostoru (Ω, P).* Indikátorem *jevu A nazveme náhodnou veličinu, $I_A : \Omega \to \{0, 1\}$, definovanou následovně*

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \omega \in A \\ 0 & \text{pro } \omega \notin A \end{cases}$$

9.3.8 Pozorování. *Pro každý jev A, $\mathbf{E}I_A = P(A)$*

Důkaz. Podle definice střední hodnoty je

$$\mathbf{E}I_A = \sum_{\omega \in \Omega} I_A(\omega) P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) = P(A)$$

□

Následující tvrzení je skoro škoda nazývat větou, jeho důkaz z definice je bezprostřední a přenecháváme jej čtenáři. Je to však tvrzení, které nám bude v dalším velice užitečné.

9.3.9 Věta (O linearitě střední hodnoty). *Buďte f a g libovolné náhodné veličiny na konečném pravděpodobnostním prostoru (Ω, P), α reálné číslo. Potom $\mathbf{E}(\alpha f) = \alpha\mathbf{E}f$, $\mathbf{E}(f+g) = (\mathbf{E}f) + (\mathbf{E}g)$.*

Zdůrazněme, že f a g mohou být naprosto libovolné, nemusí tedy být v žádném smyslu nezávislé nebo tak něco. Pokračujeme několika příklady toho, jak se 9.3.7–9.3.9 dají využít.

Další pokračování příkladu 9.3.2 (Počet jedniček). Spočítáme $\mathbf{E}f_1$, průměrný počet jedniček, asi nejelegantnějším způsobem. Jev A_i na prostoru C_n bude „v i-tém hodu padne líc", čili množina všech posloupností, majících na i-tém místě jedničku. Zřejmě $P(A_i) = \frac{1}{2}$ pro každé i. Všimněme si, že pro každou posloupnost $s \in C_n$ je $f_1(s) = I_{A_1}(s) + I_{A_2}(s) + \cdots + I_{A_n}(s)$ (triviální tvrzení jsme jen zapsali v trošku komplikovanějším značení). Z linearity střední hodnoty a pak z pozorování 9.3.8 dostaneme

$$\mathbf{E}f_1 = \mathbf{E}I_{A_1} + \mathbf{E}I_{A_2} + \quad + \mathbf{E}I_{A_n} = P(A_1 \quad P(A_2) + \quad + P(A_n) = \frac{n}{2}.$$

□

Pokračování příkladu 9.3.3 (Počet živých zajíců). Budeme počítat $\mathbf{E}f_2$, střední hodnotu počtu nezastřelených zajíců. Tentokrát A_i bude jev „i-tý zajíc přežije", formálně A_i bude množina všech zobrazení μ, která nic nezobrazí na i. Pravděpodobnost, že j-tý lovec střelí i-tého zajíce je $\frac{1}{n}$, a protože lovci si vybírají nezávisle, je $P(A_i) = (1 - 1/n)^n$. Dále postupujeme jako v předchozím příkladě:

$$\mathbf{E}f_2 = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}I_{A_i} = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \; n \approx \frac{n}{e}$$

(jak známo z analýzy, $(1 - \; /n)^n$ konverguje k e^{-1}) □

Pokračování příkladu 9.3.4 (Počet levých maxim). Budeme teď počítat střední hodnotu počtu levých maxim náhodné permutace, $\mathbf{E}f_3$. Zde A_i bude jev „i je levé maximum π", t.j. $A_i = \{\pi;\ \pi(i) > \pi(j)$ pro $j = 1, 2, \ldots, i-1\}$. Tvrdíme, že $P(A_i) = \frac{1}{i}$. Nejnázornější je si představit, že náhodnou permutaci π vyrábíme takovýmto postupem: Začneme s „hromádkou" čísel $\{1, 2, \ldots, n\}$. Vytáhneme z hromádky jedno náhodně zvolené číslo, a prohlásíme jej za $\pi(n)$. Potom ze zbývajících čísel v hromádce vytáhneme další náhodné číslo, to bude $\pi(n-1)$, atd. Hodnota $\pi(i)$ se volí v okamžiku, kdy v hromádce zbývá právě i čísel. Pravděpodobnost, že jako $\pi(i)$ zvolíme největší z těchto i čísel (což je právě jev A_i), je tudíž $\frac{1}{i}$. Zbytek výpočtu je jako v předchozím:

$$\mathbf{E}f_3 = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}I_{A_i} = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Hodnota součtu převrácených hodnot, k němuž jsme dospěli, je přibližně $\ln n$, viz cvičení 2.4.12. □

Cvičení

1. Ukažte na příkladech, že pro libovolné náhodné veličiny f, g obecně neplatí ani jedna z rovností $\mathbf{E}(fg) = (\mathbf{E}f)(\mathbf{E}g)$, $\mathbf{E}(f^2) = (\mathbf{E}f)^2$, $\mathbf{E}(1/f) = 1/\mathbf{E}f$.
2. Dokažte, že pro libovolnou náhodnou veličinu f platí $\mathbf{E}(f^2) \geq (\mathbf{E}f)^2$.
3. Nechť $f(\pi)$ je počet pevných bodů permutace π (viz část 2.7). Spočtěte $\mathbf{E}f$ pro náhodnou permutaci $\pi \in S_n$.
4. Buď π náhodná permutace množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$.
   (a)* Určete střední délku cyklu π obsahujícího číslo 1.
   (b)* Určete střední počet cyklů π.
5. Hodíme $n\times$ po sobě desetikorunovou mincí, na níž padá lev i Hradčana s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Kolik je střední počet „sérií" (série jsou úseky, kdy padá stejná strana; např. nejdřív je série 2 lvů, pak 3 Hradčany, atd.)?
6.* V první nádobě je n červených kuliček a ve druhé n modrých kuliček. Vezmene náhodně vybranou kuličku z první nádoby, náhodně vybranou kuličku z druhé nádoby, a dáme je do opačných nádob než ze kterých jsme je vytáhli. Dokažte, že opakujeme-li to $k\times$, je střední hodnota počtu červených kuliček v první nádobě rovna $\frac{1}{2}n\left(1 + \left(1 - \frac{2}{n}\right)^k\right)$.