

KAPITOLA 7

TURINGOVE STROJE: PROBLÉM ZASTAVENIA, JAZYKY TYPU 0

7.1. NEFORMÁLNY ÚVOD

V tejto kapitole ukážeme, že existuje istý Turingov stroj, ktorému, keď sa predloží kód ľubovoľného Turingovho stroja T a kód slova x , bude simulovať činnosť stroja T pri spracúvaní slova x . Takýto Turingov stroj nazývame *univerzálny*. Univerzálny Turingov stroj možno pokladať za mnohoúčelový počítač, ktorý má dostatočne veľké možnosti pre simuláciu ľubovoľného počítača, vrátane seba samého.

Ukážeme ďalej, že neexistuje algoritmus (t.j. Turingov stroj, ktorý sa zastaví pre všetky vstupné slová), ktorý by určil pre ľubovoľný Turingov stroj T a ľubovoľný vstup x , či sa T so vstupom x niekedy zastaví. Tento výsledok vo veľkej miere využijeme v kap. 14, kde dokážeme, že veľa problémov, ktoré sa týkajú tried jazykov, je rekurzívne neriešiteľných (t.j. neexistuje žiadny algoritmus, ktorý by riešil daný problém pre každý jazyk z danej triedy).

Ukážeme tiež, že existujú rekurzívne vyčísliteľné množiny, ktoré nie sú rekurzívne. Inak môžeme povedať, existujú množiny, ktoré sú rozpoznateľné pomocou Turingových strojov, ale nie pomocou takých Turingových strojov, ktoré sa zastavia pre všetky vstupné slová.

Na záver ukážeme ekvivalenciu jazykov typu 0 a množín rozpoznateľných Turingovými strojmi.

7.2. UNIVERZÁLNY TURINGOV STROJ

Existenciu univerzálného Turingovho stroja dokážeme tak, že ho skutočne zostrojíme. Najprv sa však musíme rozhodnúť, ako budeme kódovať Turingove stroje a ako vstupné slová. Pretože Turin-

gov stroj T_1 môže mať ľubovoľný počet páskových symbolov, budeme predpokladať, že páskové symboly T_1 sú kódované len s použitím symbolov 0 a 1. Čitateľovi by malo byť zrejmé, že ku každému stroju T_1 existuje T_2 s páskovými symbolmi 0 a 1 a s jedným ďalším páskovým symbolom B (prázdny symbol), ktorý akceptuje práve tie slová z $\{0, 1\}^*$, ktoré sú kódmi slov rozpoznávaných strojom T_1 . Vzhľadom na toto kódovanie stačí navrhnúť univerzálny Turingov stroj pre Turingove stroje s páskovou abecedou $\{0, 1, B\}$.

Turingov stroj v uvedenej triede možno celý zadať tabuľkou, akú vidíme v tab. 7.1. Keďže Turingov stroj môže mať ľubovoľne veľký počet stavov a páskových symbolov máme iba pevný počet, zakódujeme stavy slovami 1, 11, 111 atď.

Stav	B	0	1
1	—	—	2, 0, R
2	3, 1, L	3, 1, L	2, 1, R
3	4, 0, R	4, 0, R	3, 1, L
4	—	—	—

Tab. 7.1. Príklad zadania Turingovho stroja T s tromi páskovými symbolmi tabuľkou

Jeden zo spôsobov, ako zakódovať takúto tabuľku, je vyznačiť počet blokov rovnajúci sa počtu stavov a rozdeliť každý blok na tri podbloky; i -ty blok bude zodpovedať stavu i a tri podbloky budú zodpovedať vstupným symbolom B , 0, resp. 1.

Bloky budeme oddelovať dvoma symbolmi c a podbloky jedným c . Začiatok a koniec tabuľky budeme označovať tromi symbolmi c . Ak pre Turingov stroj, ktorý kódujeme, $\delta(i, a) = (j, b, D)$, potom podblok zodpovedajúci stavu i a vstupnému symbolu a bude obsahovať j symbolov 1, za ktorými nasleduje symbol $D = L$ alebo R , za ním je ďalej symbol $b = 0$ alebo 1. Ak $\delta(i, a)$ nie je definovaná, potom zodpovedajúci podblok bude obsahovať jediný symbol 0. Teda kód Turingovho stroja z tab. 7.1 bude vyzeráť tak, ako v tab. 7.2. Slovo 11R0 v podbloku zodpovedajúcom stavu 1 interpretujeme tak, že ak T v stave 1 číta symbol 1, zmení ho na 0, posunie sa vpravo a prejde do stavu 2.

ccc 0 c 11 R 0 cc
 111 L 1 c 111 L 1 c 11 R 1 cc
 1111 R 0 c 1111 R 0 c 111 L 1 cc
 0 c 0 c 0 ccc

Tab. 7.2. Kódovanie Turingovho stroja T z tab. 7.1

Každý stav, pre ktorý neexistuje nasledujúci stav pre žiadny z troch páskových symbolov, môžeme interpretovať ako koncový stav. V tab. 7.1 je takýmto stavom stav 4. Istotne môžeme predpokladať (bez zmeny jazyka rozpoznávaného Turingovým strojom), že Turingov stroj po akceptovaní nerobí žiadne ďalšie kroky. Okrem toho môžeme predpokladať, že pre každý stav, okrem koncových, je nasledujúci stav definovaný aspoň pre jednu hodnotu páskového symbolu. Čitateľ si to môže dokázať. Stav 1 budeme vždy pokladať za začiatkový stav.

Hoci pre kódovanie Turingovho stroja sme použili iba päť symbolov, náš univerzálny Turingov stroj bude používať 12 páskových symbolov. Použitie dodatočných symbolov vyplýva zo skutočnosti, že tento univerzálny Turingov stroj bude mať pásku, ktorá má dve stopy. Na dolnej stope sa budú používať symboly c , 0 , 1 , L , R a B , kým na hornej stope sa použijú symboly m a B . Teraz neformálne popíšeme tento univerzálny Turingov stroj.

Vstup do univerzálného Turingovho stroja bude nasledovný. Na dolnej stope bude kód nejakého Turingovho stroja, za ktorým nasleduje refazec symbolov 0 a 1 , nazveme ho *údaje*. Údaje budú oddelené od kódovania tromi za sebou idúcimi symbolmi c . Na začiatku bude horná stopa obsahovať iba symboly B , okrem políčka obsahujúceho pravé krajné c na ľavom konci bloku, ktorý prináleží k stavu 1 , a okrem ľavého krajného políčka, obsahujúceho údaje. Tieto dve políčka budú obsahovať symbol m . Prvé m sa používa na zapamätanie momentálneho stavu simulovaného Turingovho stroja a druhé m na zapamätanie polohy čítacej hlavy simulovaného Turingovho stroja. Toto znázorňuje tab. 7.3.

Označme univerzálny Turingov stroj U a kódovaný Turingov stroj T . Stroj U bude nasledujúcim spôsobom simulovať kroky, ktoré by robil T , keby mal na vstupe časť pásky U , obsahujúcu údaje.

m
 ccc blok pre stav 1 cc blok pre stav 2 cc...

m
 cc blok pre posledný stav ccc 0110... (údaje)

Tab. 7.3. Začiatková konfigurácia univerzálného Turingovho stroja

Najprv U posúva čítaciu hlavu doprava, kým nedosiahne značku v oblasti údajov nachádzajúcu sa nad vstupným symbolom, ktorý číta stroj T . Tento symbol, povedzme A , si zapamätá stroj U v riadiacej jednotke a U posúva čítacou hlavou vľavo, kým nedosiahne značku, označujúcu stav stroja T . Stroj U vymaže túto značku a pohybuje hlavou doprava na podblok zodpovedajúci symbolu A a umiesti značku nad prvý symbol v tomto podbloku, za predpokladu, že to je 1 . (Ak prvý symbol nie je 1 , U sa zastaví, pretože neexistuje žiadny ďalší krok pre T .) V ďalšom budeme túto značku označovať ako m_1 .

Predpokladajme, že prvý symbol bol 1 ; vidíme, že U sa teraz posúva doľava, kým nenájde tri po sebe nasledujúce c . Stroj U sa potom pohne doprava a označí ten zo symbolov c , ktorý je najviac vpravo. Túto značku nazveme m_2 . U pokračuje v pohybe svojej čítacej hlavy doprava, až kým nenájde značku m_1 . Teraz stroj U vstúpi do podprogramu, ktorý striedavo posunie m_1 o jednu 1 doprava a m_2 o jeden blok doprava. (Aby rozlíšil od seba obidve značky označené m , U znamená vo svojej riadiacej jednotke tú značku, ktorú čítal naposledy.) Keď stroj U posunie m_1 na symbol, ktorý nie je 1 , potom m_2 je umiestené nad c , ktoré je práve pred blokom zodpovedajúcim nasledujúcemu stavu stroja T .

V tomto okamihu U vymaže m_1 a zaznamená do svojej riadiacej jednotky symbol, ktorý T bude zapisovať, a smer, v ktorom T posunie svoju čítaciu hlavu. Stroj U potom posunie svoju hlavu doprava, do oblasti údajov, a nájde značku, ktorá udáva polohu čítacej hlavy T . Symbol pod značkou vhodne zmení a značku posunie o jedno políčko vľavo alebo vpravo v závislosti od toho, či T posunie svoju hlavu vľavo alebo vpravo.

Stroj U simuloval jeden krok stroja T . Stroj U zapamätá nový symbol, ktorý číta T , do svojej riadiacej jednotky, začne posúvať svoju hlavu doľava, až kým nedosiahne značku, zaznamenávajúcu

stav stroja T , a opakuje práve opísaný postup. Ak sa T zastaví s týmito konkrétnymi údajmi, U sa nakoniec zastaví a údajová časť pásky bude vyzerať presne tak ako páska stroja T . Ak sa T zastaví, U vie, či T je v koncovom stave. Ak sa T nezastaví, U sa nezastaví a ani neakceptuje. Teda náš univerzálny Turingov stroj simuluje T .

Podrobná konštrukcia univerzálného Turingovho stroja, ktorý sme práve neformálne opísali, je znázornená v tab. 7.4. Pre lepšie pochopenie konštrukcie je v tabuľke pri každej skupine stavov stručne uvedený jej účel.

Mali by sme zdôrazniť, že náš univerzálny Turingov stroj má 12 páskových symbolov, ale môže simulovať iba Turingove stroje s dvoma páskovými symbolmi. Môžeme však zostrojiť ekvivalentný stroj, ktorý používa iba dva páskové symboly. Na to potrebujeme zakódovať každý páskový symbol blokom štyroch symbolov. V údajovej časti pásky na začiatku práce sa použijú štyri políčka pre každé neprázdné políčko pôvodnej vstupnej pásky stroja T .

7.3. NEROZHODNUTEĽNOSŤ PROBLÉMU ZASTAVENIA

Problém zastavenia pre Turingove stroje je definovaný takto: Nech je daný Turingov stroj v ľubovoľnej konfigurácii s konečne dlhým reťazcom neprázdných páskových symbolov; zastaví sa niekedy tento Turingov stroj? O tomto probléme hovoríme, že je *nerozhodnuteľný* (alebo *nerozhodnuteľný*) v tom zmysle, že neexistuje algoritmus, ktorý pre každý Turingov stroj a každú konfiguráciu určí, či sa tento Turingov stroj v uvedenej konfigurácii nakoniec zastaví. Toto neznamena, že nemôžeme určiť, či sa konkrétny Turingov stroj v nejakej konkrétnej konfigurácii zastaví.

Pri opisovaní univerzálného Turingovho stroja sme sa stretli s kódom pre každý Turingov stroj s páskovými symbolmi 0, 1 a B . Tento kód bolo slovo z $\{0, 1, c, L, R\}^*$. Všetky takéto slová môžeme očíslovať tak, že napíšeme ich zoznam v usporiadaní podľa dĺžky. Slová rovnakej dĺžky usporiadame podľa ich hodnoty pri základe 5. (Predpokladáme, že tých päť symbolov má úlohu celých čísel 0, 1, 2, 3, 4 v nejakom poradí.) Rovnako sa dajú usporiadať

	0	1	B				0	m					
			c	L	R	B		c	L	R	B		
A	← posuv vpravo →					—	—	B, R			—	Hľadanie znač- ky v oblasti údajov	
B	← posuv vpravo →					—	C_0, L	C_1, L	— C_B, L				
C_B	← posuv vľavo →					—	—	$D_B, (\frac{2}{1}), R$			—	Hľadanie znač- ky v tabuľke stavov	
C_0	← posuv vľavo →					—	—	$D_0, (\frac{2}{1}), R$					
C_1	← posuv vľavo →					—	—	$D_1, (\frac{2}{1}), R$					
D_B	V	$E, (\frac{2}{1}), L$	—	—	—	—							Hľadanie pod- bloku zodpove- dajúceho vstup- nému symbolu
D_0	R	R	D_B, R	R	R								
D_1	R	R	D_0, R	R	R								
E	L	L	F, L	L	L								Hľadanie stavu jedna a označe- nie. Táto značka sa v texte nazý- va m_2 .
F	E, L	E, L	G, L	E, L	E, L	—							
G	E, L	E, L	H, R	E, L	E, L	—							
H	I, R												
	$J, (\frac{2}{1}), R$												

Tab. 7.4. Prechodová tabuľka pre univerzálny Turingov stroj. Položky v tabuľke majú nasledujúci význam. Trojica „stav — páskový symbol — L alebo R“ určuje ďalší stav, páskový symbol, ktorý sa bude zapisovať, a smer ďalšieho pohybu. Dvojica „stav — L alebo R“ určuje ďalší stav a smer pohybu. Páskový symbol sa ponechá nezmenený. Symboly L alebo R a výrazy „posuv vpravo“ alebo „posuv vľavo“ označujú, že Turingov stroj sa posunie vľavo alebo vpravo bez zmeny stavu alebo páskového symbolu. Prázdne miesto označuje situáciu, ktorá by nemala nikdy nastať. Stav Y je koncový stav. To znamená, že zo stavu Y nie je možný žiadny ďalší krok. (Tabuľka pokračuje na stranách 160 a 161.)

	0	1	B c	L	R	B	0	1	m c	L	R	B	
J	← posuv vpravo →					—	—	$K_L, (\frac{a}{1}), R$	—	—	—	—	Začiatok pod-programu pre určenie ďalšieho stavu
K_L	—	$M_L, (\frac{a}{1}), L$	—	T_L, R	T_R, R	—							
M_L	← posuv vľavo →					—	—	—	$N_L, (\frac{a}{1}), R$	—	—	—	m_2 vľavo od m_1
N_L	R	R	P_L, R	R	R	—	—	N_R, R	—	—	—	—	
P_L	N_L, R	N_L, R	$S_L, (\frac{a}{1}), R$	N_L, R	N_L, R	—	—	N_R, R	—	—	—	—	m_2 vpravo od m_1
S_L	← posuv vpravo →					—	—	$K_L, (\frac{a}{1}), R$	—	—	—	—	
K_R	—	$M_R, (\frac{a}{1}), R$	—	T_L, R	T_R, R	—							m_2 vpravo od m_1
M_R	← posuv vpravo →					—	—	—	$N_R, (\frac{a}{1}), R$	—	—	—	
N_R	R	R	P_R, R	R	R	—							Zaznamenanie symbolu, ktorý sa má zapisovať
P_R	N_R, R	N_R, R	$S_R, (\frac{a}{1}), L$	N_R, R	N_R, R	—							
S_R	← posuv vľavo →					—	—	$K_R, (\frac{a}{1}), R$	—	—	—	—	
T_L	T_{L-0}, R	T_{L-1}, R	—	—	—	—							
T_R	T_{R-0}, R	T_{R-1}, R	—	—	—	—							

Pokračovanie tab. 7.4

	0	1	$\begin{matrix} B \\ c \end{matrix}$	L	R	B	0	$\begin{matrix} m \\ c \end{matrix}$	L	R	B		
	← posuv vpravo → —						$U, (\frac{B}{c}), L$	$U, (\frac{B}{0}), L$	—	—	—	$U, (\frac{B}{0}), L$	Nájdenie znač- ky v oblasti údajov
	← posuv vpravo → —						$U, (\frac{B}{1}), L$	$U, (\frac{B}{1}), L$	—	—	—	$U, (\frac{B}{1}), L$	
	← posuv vpravo → —						$U, (\frac{B}{0}), R$	$U, (\frac{B}{0}), R$	—	—	—	$U, (\frac{B}{0}), R$	
	← posuv vpravo → —						$U, (\frac{B}{1}), R$	$U, (\frac{B}{1}), R$	—	—	—	$U, (\frac{B}{1}), R$	
U	$C_0, (\frac{B}{0}), L$	$C_1, (\frac{B}{1}), L$	—			$— C_B, (\frac{B}{B}), L$							Úprava značky
V	L	L	W, L	L	L								
W	V, L	V, L	X_1, R	V, L	V, L								Kontrola, či stav, v ktorom sa stroj zastavil, je koncový
X_1			X_2, R	—									
X_2			X_3, R										
X_3			X_4, R										
X_4			X_5, R										
X_5			X_6, R	—	—	—							
X_6			Y, R										Akceptovanie
Y													

Dokončenie tab. 7.4