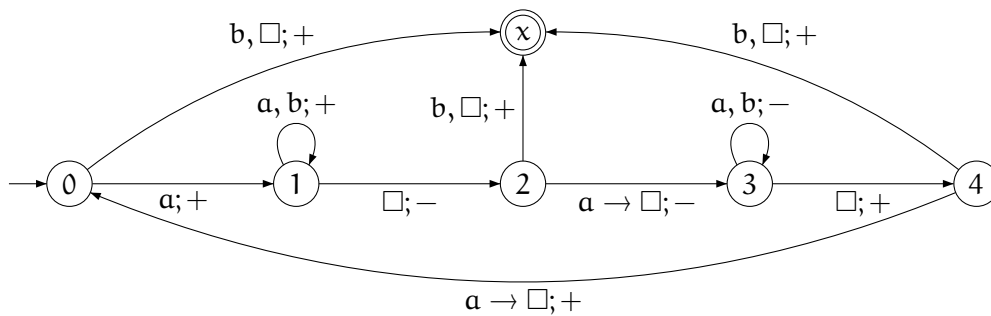


## Cvičení 6

**Příklad 1:** Navrhněte Turingův stroj, který ze zadaného slova nad abecedou  $\{a, b\}$  umaže od začátku i od konce nejdelší možné stejně dlouhé úseky znaků  $a$ . (Tj. ze slova ‘aaababaa’ udělá ‘abab’, kdežto z ‘aaabab’ neumaže nic. Ze slova ‘aaa’ zbyde  $\varepsilon$ .)

*Řešení:* Nejprve si problém rozebereme. Pokud slovo začíná  $b$ , můžeme hned skončit. Pokud je na začátku  $a$ , možná by se někomu chtělo jej hned umazat – přepsat na  $\square$ , ale to není možné, protože jsme ještě nezkontrolovali, jestli je  $a$  i na konci slova. Proto se nejprve vždy musíme podívat i na konec, zda tam jsou odpovídající  $a$ , od konce už pak můžeme umazat a od začátku  $a$  umažeme až po návratu zpět.

Další otázkou je, jak si spočítáme, kolik  $a$  je na začátku i na konci společných. Bohužel zde narazíme na podobné omezení jako u automatů – samotný TS (jeho řídicí jednotka) si nemůže znaky  $a$  spočítat, protože má jen omezeně mnoho stavů. Proto budeme muset znaky  $a$  umazávat postupně a synchronizovaně.

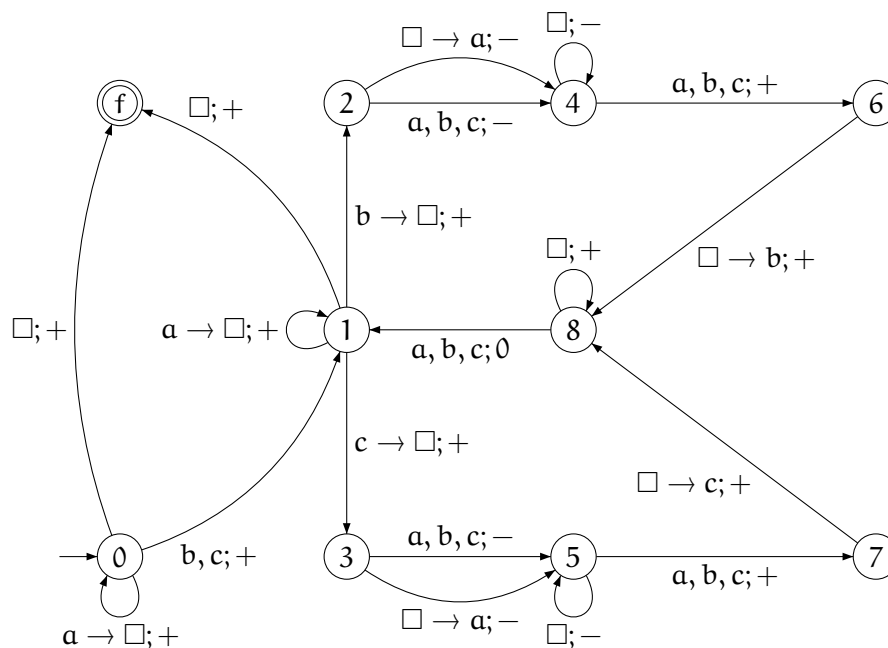


Jinými slovy, zkontrolujeme znak  $a$  na začátku, pak se přesuneme na konec, pokud tam  $a$  najdeme, umažeme jej, vrátíme se na začátek a odpovídající  $a$  také umažeme, a tak pořád dokola až do zastavení.

**Příklad 2:** Navrhněte Turingův stroj, který z daného slova nad abecedou  $\{a, b, c\}$  vypustí všechny výskyty znaku  $a$ .

*Řešení:* Příklad se zdá jednoduchý – TS by mohl projít všechny znaky slova a znak  $a$  přepíše na  $\square$ . Je to však korektní postup?

Zadání přece říká, že se znaky  $a$  mají **vypustit**, ne nahradit mezerami, takže my místo pouhého přepisování znaku  $a$  musíme všechny znaky za ním posunout o 1 dopředu. (Přepisování  $a$  na  $\square$  lze tedy použít jen na prvních a posledních znacích slova.) Navíc si musíme uvědomit, že po vypuštění dalších znaků  $a$  se už bude zbytek slova posouvat o více než jeden znak doleva.



Výsledný Turingův stroj je již dosti složitý, neboť musí řešit množství problematických okrajových situací. Zde uvádíme neformální slovní popis jeho činnosti:

Na začátku jsou ve stavu 0 umazávány všechny znaky  $a$ . Po prvním výskytu jiného znaku stroj přejde do stavu 1, který je vlastně centrálním stavem hlavního pracovního cyklu stroje. Při každém průchodu tímto pracovním cyklem z 1 zpět do 1 je přenesen jeden následující znak  $b$  (horní větev) či  $c$  (dolní větev) z původní pozice na novou (vlevo). Znak se přenáší přes střední úsek mezer (který může být libovolně dlouhý), což nám umožňuje znaky  $a$  prostě mazat. Přenos je konkrétně implementován tak, že znak je na původní pozici smazán, pak stroj přejde po mezerách doleva na upravený úsek slova, tam přenesený znak zpětně zapíše a po mezerách zase přejde doprava.

Všimněte si “podivných” přechodů  $2 \rightarrow 4$  a  $3 \rightarrow 5$  po znaku  $\square$ . Proč je tam zapisován znak  $a$ ? Čtení znaku  $\square$  ve stavech 2, 4 znamená, že jsme dosáhli konce slova, avšak skončit ještě nemůžeme, neboť nám zbývá zapsat předchozí smazaný znak  $b$  nebo  $c$ . Pracovní cyklus proto musíme dokončit, ale zároveň si nemůžeme dovolit nechat na pravém konci slova jen mezery, protože by pak stroj ve stavu 8 skončil v nekonečné smyčce. Proto si pomůžeme zapsáním na konec znaku  $a$ , který se stejně pak smaže.

**Příklad 3:** Navrhněte Turingovy stroje, které budou rozpoznávat následující jazyky:

a)  $\{w \in \{a, b\}^* \mid w = w^R\}$

b)  $\{wcw \mid w \in \{a, b\}^*\}$

*Poznámka:* Abeceda je  $\{a, b, c\}$ .

c)  $\{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$

**Příklad 4:** Navrhněte jednopáskový Turingův stroj, který dané číslo zapsané v binární soustavě celočíselně vydělí třemi.

Například pro vstup 100101 (což je v desítkové soustavě 37) bude výstupem řetězec 1100 (což je v desítkové soustavě 12), protože  $\lfloor 37/3 \rfloor = 12$ .

*Návod:* Vzpoměňte si na klasický školní algoritmus dělení čísel a postupujte přesně podle něj.

*Řešení:* Turingův stroj  $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, p_0, F)$ , kde  $Q = \{p_0, p_1, p_2, q_0, q_1, q_2, r, f\}$ ,  $\Sigma = \{0, 1\}$ ,  $\Gamma = \{\square, 0, 1\}$ ,  $F = \{f\}$  a kde přechodová funkce  $\delta$  je dána následující tabulkou:

| $\delta$ | $\square$          | 0                    | 1                    |
|----------|--------------------|----------------------|----------------------|
| $p_0$    | $(r, \square, -1)$ | $(p_0, \square, +1)$ | $(p_1, \square, +1)$ |
| $p_1$    | $(r, \square, -1)$ | $(p_2, \square, +1)$ | $(q_0, 1, +1)$       |
| $p_2$    | $(r, \square, -1)$ | $(q_1, 1, +1)$       | $(q_2, 1, +1)$       |
| $q_0$    | $(f, \square, 0)$  | $(q_0, 0, +1)$       | $(q_1, 0, +1)$       |
| $q_1$    | $(f, \square, 0)$  | $(q_2, 0, +1)$       | $(q_0, 1, +1)$       |
| $q_2$    | $(f, \square, 0)$  | $(q_1, 1, +1)$       | $(q_2, 1, +1)$       |
| $r$      | $(f, 0, +1)$       | $(f, 0, +1)$         | $(f, 0, +1)$         |

**Příklad 5:** Popište, jak je možné činnost jednopáskového Turingova stroje s oboustranně nekonečnou páskou simulovat jednopáskovým Turingovým strojem s jednostranně nekonečnou páskou.